Corrigés des exercices

Utiliser les propriétés des polynômes

Exercice 1 :

- Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3$. $\Delta = 16$ donc $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$ donc $P(x) = (x+3)(x-1)$ et donc $f(x) = \frac{P(x)}{x-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x + 3$ donc $f(x)$ est bien un polynôme. Son degré est 1

- $f(x) = (x-1)(x+2)(6-5x) = (x^2+x-2)(6-5x) = 6x^2 + 6x - 12 - 5x^3 - 5x^2 + 10x = -5x^3 + x^2 + 16x - 12$. $f(x)$ est donc un polynôme de degré 3

- L'extremum de f est donné par $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2/3} = \frac{6}{2} = 3$. Puisque $a > 0$, il s'agit d'un minimum et sa valeur est $f(3) = \frac{1}{3} \times 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 0$

Mettre un trinôme sous sa forme canonique

Exercice 2 :

$$x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$-3x^2 + 5x + 1 = -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right) = -3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{1}{3}\right] = -3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$$

Exercice 3 :

1. $f(x) = -(x^2 - 4x - 1) = -[(x-2)^2 - 4 - 1] = -[(x-2)^2 - 5] = -(x-2)^2 + 5$

2. D'après la forme canonique, $\alpha = 2$ et $\beta = 5$ donc les coordonnées du sommet de la parabole sont $(2\,;5)$
De plus, $a = -1 < 0$ donc f est croissante jusqu'à $x = 2$, puis décroissante à partir de $x = 2$
Ainsi, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de P	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Remarque : on aurait aussi pu calculer les coordonnées du sommet de la parabole de cette manière : $(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right))$, c'est-à-dire $-\frac{4}{2\times(-1)} = 2$ et $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$

3. Lorsqu'un point appartient à l'axe des abscisses, son ordonnée vaut 0. Ainsi il s'agit ici de résoudre l'équation $y = 0$, ou encore $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-1) \times (1) = 16 + 4 = 20$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(4) - \sqrt{20}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(4) + \sqrt{20}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Les coordonnées des points d'intersection sont ainsi $(2 + \sqrt{5}\,;0)$ et $(2 - \sqrt{5}\,;0)$

Résoudre une équation du second degré

Exercice 4 :

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$x^2 - x - 1 = 0.\ \Delta = 5 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(x+1)(x^2 - 4x - 5) = (2-x)(3x^2 - 14x - 5)$.

Posons $P(x) = x^2 - 4x - 5$ et $Q(x) = 3x^2 - 14x - 5$. On peut écrire après factorisation $P(x) = (x-5)(x+1)$ et $Q(x) = 3(x-5)(x+\frac{1}{3})$ donc l'équation devient :

$$(x+1)(x-5)(x+1) = 3(2-x)(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-5)(x+1) - 3(2-x)(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[(x+1)^2 - 3(2-x)\left(x+\frac{1}{3}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)[4x^2 - 3x - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right) = 0$$

D'où $S = \{-\frac{1}{4}\,, 1\,, 5\}$

Exercice 5 :

- $3x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution

$$S = \{\emptyset\}$$

- $2x^2 - 4x = 30 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 30 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-30) = 16 + 240 = 256$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{256}}{2 \times 2} = \dfrac{4 - 16}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{256}}{2 \times 2} = \dfrac{4 + 16}{4} = \dfrac{20}{4} = 5 \end{cases}$$

$$S = \{-3\,;5\}$$

- $5x(x + 1) = -2(2x - 1)$

Ici pas de facteur commun ou d'identité remarquable : la seule solution est de développer pour faire apparaître un polynôme du second degré.

$$5x(x + 1) = -2(2x - 1) \Leftrightarrow 5x^2 + 5x = -4x + 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 81 + 40 = 121$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - \sqrt{121}}{2 \times 5} = \dfrac{-9 - 11}{10} = \dfrac{-20}{10} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + \sqrt{121}}{2 \times 5} = \dfrac{-9 + 11}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$S = \{-2\,;\frac{1}{5}\}$$

- $x^3 - x^2 + 5x = 0$

Il est possible ici de factoriser par x, ce qui évite d'avoir à utiliser la méthode d'identification

$x^3 - x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 1 - 20 = -19$

$\Delta < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 5 = 0$ n'admet aucune solution

$$S = \{0\}$$

Exercice 6 :

1. Détermination des racines de $P(x) = x^2 - 4x - 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \dfrac{4 - 6}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \dfrac{4 + 6}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Détermination des racines de $Q(x) = 3x^2 - 14x - 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 196 + 60 = 256$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-14) - \sqrt{256}}{2 \times 3} = \dfrac{14 - 16}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-14) + \sqrt{256}}{2 \times 3} = \dfrac{14 + 16}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 \end{cases}$$

On peut en déduire que les polynômes P et Q admettent une racine commune : 5

2. D'après ce qui précède, une factorisation de P est $P(x) = (x+1)(x-5)$ et une factorisation de Q est $Q(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-5)$

   Puisque l'équation proposée est $(x+1)P(x) = (2-x)Q(x)$, elle équivaut donc à $(x+1)(x+1)(x-5) = (2-x) \times 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-5)$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) = (2-x)(3x+1)(x-5)$

Remarque : cette étape n'était pas obligatoire mais simplifie les calculs par la suite.

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) - (2-x)(3x+1)(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)[(x+1)^2-(2-x)(3x+1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+2x+1-6x-2+3x^2+x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(4x^2-3x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $4x^2-3x-1 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times 4\times(-1) = 9+16 = 25$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 4} = \dfrac{3-5}{8} = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 4} = \dfrac{3+5}{8} = \dfrac{8}{8} = 1 \end{cases}$$

Au final, $S = \{-\frac{1}{4}\,;1\,;5\}$

Résoudre une inéquation du second degré

Exercice 7 :

$2x^2+3x-2 \geq 0$. $\Delta = 25 > 0$ d'où $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Ici $a = 2 > 0$ donc le $+$ est à l'extérieur des racines donc $x \in]-\infty\,,-2] \cup [\frac{1}{2}\,,+\infty[$

$x(x-1) > -1 \Leftrightarrow x^2-x+1 = 0$. $\Delta = -3 < 0$ donc aucune solution réelle.

$\frac{2x+1}{-x^2+2x+3} < 0$. Soit $P(x) = -x^2+2x+3$. $\Delta = 16 > 0$ d'où $x_1 = 3$ et $x_1 = -1$. L'idéal est ici de faire un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+1}{-x^2+2x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi par lecture $\frac{2x+1}{-x^2+2x+3} < 0 \Leftrightarrow x \in]-1\,,-\frac{1}{2}\,[\cup]\,3\,,+\infty[$

$(x-1)(x^2+4) < 2(x-1)(x^2-x+3) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)-2(x-1)(x^2-x+3) < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[(x^2+4)-2(x^2-x+3)] < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-x^2+2x-2) < 0$

Soit $P(x) = -x^2+2x-2$. Son $\Delta = -4 < 0$ donc P n'admet pas de racine : son signe est uniforme sur $\mathbb{R}$. Dressons le tableau de signes de la fonction

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$-x^2+2x-2$		$-$		$-$	
$(x-1)(-x^2+2x-2)$		$+$	0	$-$	

Ainsi $(x-1)(-x^2+2x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in \,]1\,;\,+\infty[$

<u>Exercice 8</u> :

- $x^2-5x+4 \leq 0$: il s'agit de dresser le tableau de signes du polynôme $P(x) = x^2-5x+4$

On résout $x^2-5x+4=0$. Le discriminant du polynôme P vaut :

$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times 4\times 1 = 25-16 = 9$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = [1\,;4]$

- $x(x+2) > x+3 \Leftrightarrow x^2+2x > x+3 \Leftrightarrow x^2+x-3 > 0$

On résout $x^2+x-3=0$

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 1\times(-3) = 1+12 = 13$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2\times 1} = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\times 1} = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty\,;\,\frac{-1-\sqrt{13}}{2}[\,\cup\,]\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\,;+\infty[$

- $-2x^2+3x \geq 5 \Leftrightarrow -2x^2+3x-5 \geq 0$

Le polynôme $P(x) = -2x^2+3x-5$ a pour discriminant

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times(-2)\times(-5) = 9-40 = -31$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution : le polynôme est du signe de a

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	

Comme le polynôme n'est jamais positif ou nul, $S = \emptyset$ (l'inéquation n'a pas de solution)

- On résout l'inéquation :

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 4x+5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} - (4x+5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} - \frac{(4x+5)(1+x)}{1+x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x-4x-4x^2-5-5x}{1+x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2-10x-4}{1+x} \geq 0$$

On résout $4x^2-10x-4 = 0$ et $1+x \neq 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4\times(-4)\times(-4) = 100-64 = 36$

$\Delta > 0$ donc l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)-\sqrt{36}}{2\times(-4)} = \dfrac{10-6}{-8} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)+\sqrt{36}}{2\times(-4)} = \dfrac{10+6}{-8} = \dfrac{16}{-8} = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$ $+\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$	
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-4x^2-10x-4}{1+x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

Donc $S =]-\infty\,;\,-2\,]\cup]-1\,;-\frac{1}{2}]$

Remarque : attention au sens des crochets : -1 *est une valeur interdite,* -2 *et* $-\frac{1}{2}$ *ne le sont pas.*

- On résout

$$\frac{-2x+1}{x^2-3x+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+1}{x^2-3x+2} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+1}{x^2-3x+2} - \frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-2x+3x+1-2}{x^2-3x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x-1}{x^2-3x+2} \leq 0$$

Le polynôme $P(x) = -x^2+x-1$ a pour discriminant

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times(-1)\times(-1) = 1-4 = -3$

$\Delta > 0$ donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

Le polynôme $Q(x) = x^2-3x+2$ a pour discriminant

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1$

$\Delta > 0$ donc l'équation $Q(x) = 0$ admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$		$-$		$-$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x^2+x-1}{x^2-3x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc $S =]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$

<u>Exercice 9</u> :

✓ $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1. Il s'agit d'une équation bicarrée : posons $X = x^2$. Le polynôme devient alors :

$P(X) = X^2 - 5X + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 1\times 4 = 25 - 16 = 9$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1} = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

En renversant le changement de variable,

Si $X_1 = 1$ alors ${x_1}^2 = 1$ a pour solutions 1 et -1

Si $X_2 = 1$ alors ${x_2}^2 = 4$ a pour solutions 2 et -2

L'ensemble solution est ainsi $S = \{-2\,;\,-1\,;\,1\,;2\}$ et donc la factorisation du polynôme est $P(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Remarque : l'exercice ne précisant pas le niveau de la factorisation demandée, la réponse $P(x) = (x^2-4)(x^2-1)$ *était également acceptable.*

2. Il suffit de dresser le tableau de signes adéquat :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty\,;\,-2] \cup [-1\,;1] \cup [2\,;\,+\infty[$

- ✓ $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

1. $f(4) = -4^3 + 6 \times 4^2 - 9 \times 4 + 4 = 0$

On peut donc écrire $f(x) = (x-4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 4ax^2 - 4bx - 4c = ax^3 + (b-4a)x^2 + x(c-4b) - 4c$

D'où le système :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - 4a = 6 \\ c - 4b = -9 \\ -4c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = (x-4)(-x^2 + 2x - 1)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 4 - 4 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Et la factorisation de f est $f(x) = (x-4)(x-1)^2$

2. Le tableau de signes de $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - 6x - 8$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 10 :

- $x^3 - x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - x + 5 = 0$ dont le $\Delta = -19 < 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. On pose le changement de variable $X = x^2$ (et donc $X^2 = x^4$). Dès lors l'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$. $\Delta = 9$ d'où $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$. Pour terminer, puisque $X = x^2$ on a $x = \sqrt{X}$ donc $x_1 = \sqrt{X_1} = 1$ ou -1 et $x_2 = \sqrt{X_2} = 2$ ou -2

Exercice 11 :

- On donne $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$
  1. $f(4) = -4^3 + 6 \times 4^2 - 9 \times 4 + 4 = 0$: 4 est donc une racine de f.
  2. On utilise la méthode d'identification :
     $(x-4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 4ax^2 - 4bx - 4c$
     $= ax^3 + x^2(b - 4a) + x(c - 4b) - 4c$
     Ainsi par identification :
     $$\begin{cases} a = -1 \\ b - 4a = 6 \\ c - 4b = -9 \\ -4c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$
     On a donc $f(x) = (x-4)(-x^2 + 2x - 1)$
  3. Soit $P(x) = -x^2 + 2x - 1$. On peut utiliser la méthode classique du discriminant ou remarquer que $P(x) = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$
     Au final $f(x) = -(x-4)(x-1)^2$
  4. Un tableau de signes reste la méthode la plus simple ici :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
a		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Pour conclure, $f(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = 4$, $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 4[$ et $f(x) < 0$ si $x \in]4, +\infty[$

Problèmes

Problème 1 :

Posons x la largeur du champ et y sa longueur. On a $P = 2(x+y)$ et $S = x \times y$ d'où :

$$\begin{cases} 2(x+y) = 230 \\ x \times y = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{230-2y}{2} \\ x \times y = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{230-2y}{2} \\ \dfrac{230-2y}{2} \times y = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{230-2y}{2} \\ (115-y) \times y = 3000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{230-2y}{2} \\ -y^2 + 115y - 3000 = 0 \end{cases}$$

Soit $P(y) = -y^2 + 115y - 3000$. Son discriminant est $\Delta = 1225$

D'où deux solutions $y_1 = 75$ et $y_2 = 40$

On en déduit que x admet de même deux valeurs : $x_1 = 40$ et $x_2 = 75$

Les dimensions du champ sont donc 40m et 75m

Problème 2 :

On doit résoudre l'équation $x + \sqrt{x} = 600$. Telle quelle cette équation est insoluble. On peut cependant poser le changement de variable $X = \sqrt{x}$ (et donc $x = X^2$). L'équation devient alors $X^2 + X = 600$ ou encore $X^2 + X - 600 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 2401$

D'où deux solutions $X_1 = -25$ et $X_2 = 24$.

On ne conserve par hypothèse que la solution positive et on inverse le changement de variable pour trouver $x = X^2 = 24^2 = 576$

Remarque : On peut ensuite vérifier que $\sqrt{576} + 576 = 600$

Problème 3 :

- ✓ Soit x l'entier naturel recherché. L'entier consécutif à x est donc $x+1$

La question posée peut être formulée par l'équation $x \times (x+1) = 16002 \Leftrightarrow x^2 + x - 16002 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-16002) = 1 + 64008 = 64009$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{64009}}{2 \times 1} = \dfrac{-1-253}{2} = \dfrac{-254}{2} = -127 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{64009}}{2 \times 1} = \dfrac{-1+253}{2} = \dfrac{252}{2} = 126 \end{cases}$$

Un entier naturel (ensemble $\mathbb{N}$) ne pouvant pas être négatif x vaut nécessairement 126.

Les deux nombre recherchés sont donc 126 et 127

Remarque : on peut facilement vérifier que $126 \times 127 = 16002$

- ✓ Afin qu'une équation ait deux solutions, il faut nécessairement faire apparaître un polynôme du second degré avec $\Delta > 0$.

De plus, pour que 2 et 3 soient solutions, il faut nécessairement que 2 et 3 soient **racines** de ce polynôme.

La forme factorisée de ce polynôme doit donc être $a(x-2)(x-3)$et donc l'équation doit être de la forme $a(x-2)(x-3)=0$

Un exemple : 2 et 3 sont solutions de $-4(x-2)(x-3)=0$

Remarques :

- *La réponse est juste pour tout* $a \in \mathbb{R}$
- *Il est également possible de développer le polynôme, ce qui donnerait* $ax^2 - 5ax + 6a = 0$*, voire même de déplacer d'un côté ou de l'autre du* $'' = ''$ *les différents termes de l'équation, par exemple* $ax^2 = 5ax - 6a$*. Par exemple,* 2 *et* 3 *sont solutions de* $-2x^2 = -10x + 12$*. Faites des essais pour vous en convaincre.*

- ✓ Posons deux réels a et b tels que $\begin{cases} a+b=S \\ a \times b = P \end{cases}$
  L'équation $x^2 - Sx + P = 0$ équivaut alors à $x^2 - (a+b)x + a \times b = 0$

$\Delta = (a+b)^2 - 4 \times 1 \times (a \times b) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$\Delta > 0$ (c'est un carré) donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-(a+b)) - \sqrt{(a-b)^2}}{2 \times 1} = \dfrac{a+b-(a-b)}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \\ x_2 = \dfrac{-(-(a+b)) + \sqrt{(a-b)^2}}{2 \times 1} = \dfrac{a+b+(a-b)}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \end{cases}$$

Ce qui prouve bien que a et b sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Remarque : dans le cas particulier ou l'on aurait $a = b$*, alors* $\Delta = (a-b)^2 = 0$ *et l'équation admet une seule solution* $x = \frac{-(-(a+b))}{2 \times 1} = \frac{a+b}{2 \times 1} = a$ *ou* b *selon que l'on remplace* a *par* b *ou* b *par* a *(ce qui est possible puisque les deux valeurs sont égales). Ce qui répond également à la question au final.*