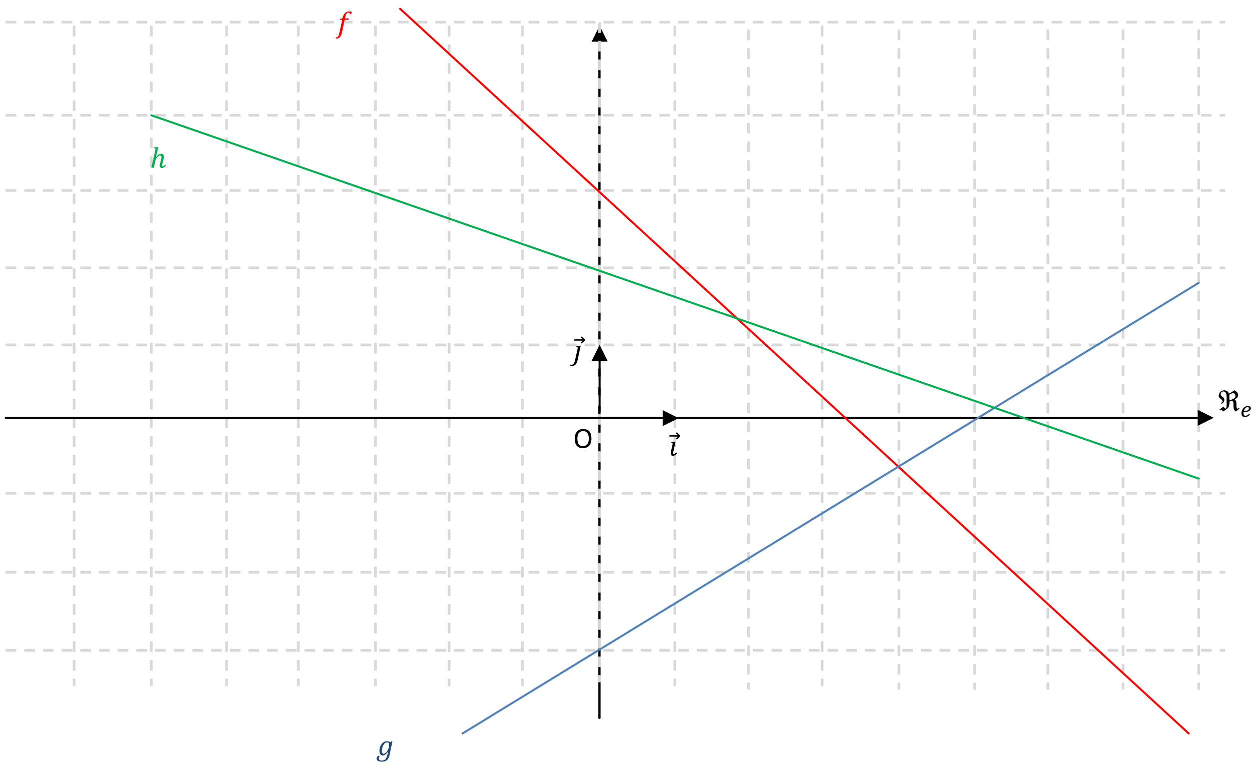
Corrigés des exercices

Tracer des fonctions affines dans un repère

Exercice 1 :



Reconnaître des coefficients graphiquement

Exercice 2 :

1. Il suffit ici de déterminer les coordonnées (si possible entières) de deux points appartenant à chacune des deux droites :
   Pour f : on peut choisir les points de coordonnées $(-4\,,3)$ et $(1\,,1)$
   Ce qui donne $a = \frac{1-3}{1-(-4)} = -\frac{2}{5}$ et puisque $f(1) = a \times 1 + b$ on trouve $b = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$
   Pour g : on peut choisir les points de coordonnées $(-1\,,0)$ et $(1\,,1)$
   Ce qui donne $a = \frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ et puisque $f(1) = a \times 1 + b$ on trouve $b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
2. Ainsi $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
3. Graphiquement, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ et $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$
4. L'équation $f(x) = g(x)$ se résout graphiquement en déterminant l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

Ici $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

5. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x = \frac{7}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{10}x = \frac{9}{10} \Leftrightarrow x = 1$

<u>Exercice 3</u> :

1. $f(2) = 6$ et $f(-3) = 1$

Donc la droite passe par les points de coordonnées $A(2;6)$ et $B(-3;1)$.

C'est une fonction affine, f admet donc une équation de la forme $y = ax + b$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-6}{-3-2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

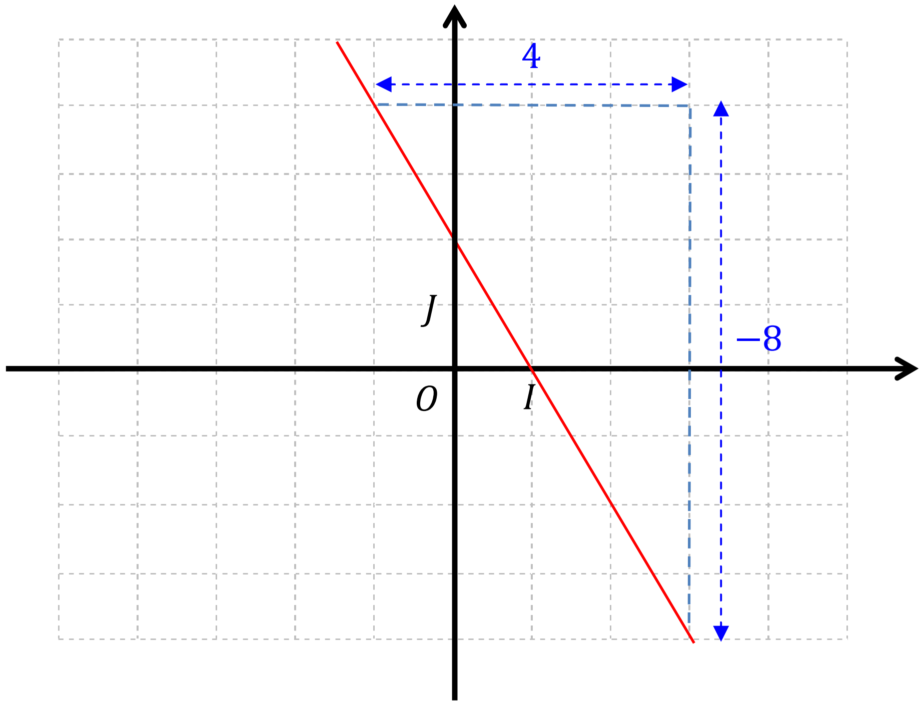
De plus, $A \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$. On a donc :

$$y_A = 1 \times x_A + b \Leftrightarrow 6 = 1 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 6 - 2 \Leftrightarrow b = 4$$

On obtient donc :

$$f(x) = x + 4$$

2.



Graphiquement : $b = 2$ et $a = \frac{-8}{4} = -2$

On obtient :

$$y = -2x + 2$$

3. Graphiquement, on voit que :

La droite coupe l'axe des abscisses en $(1; 0)$ et l'axe des ordonnées en $(0; 2)$

4. Par le calcul on a :

Si $x = 0$ alors $y = -2 \times 0 + 2 = 2$. Le point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées est bien $(0; 2)$.

Si $y = 0$ alors $0 = -2x + 2 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$. Le point d'intersection entre la droite et l'axe des abscisses est bien $(1; 0)$.

Droites perpendiculaires et droites parallèles

Exercice 4 :

Deux droites sont parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Le coefficient directeur de D_1 est -3

Le coefficient directeur de D_2 est $\frac{1}{3}$

Le coefficient directeur de D_3 est -3

On peut déjà en déduire que D_1 et D_3 sont parallèles.

Par ailleurs, deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

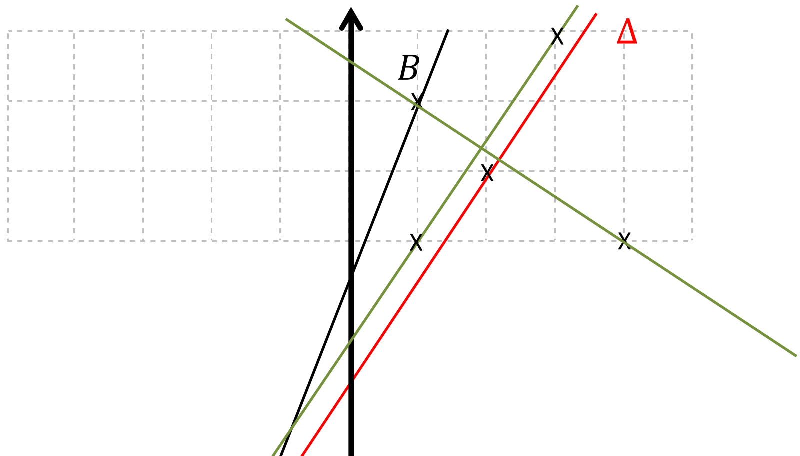
Or $-3 \times \frac{1}{3} = -1$ donc D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

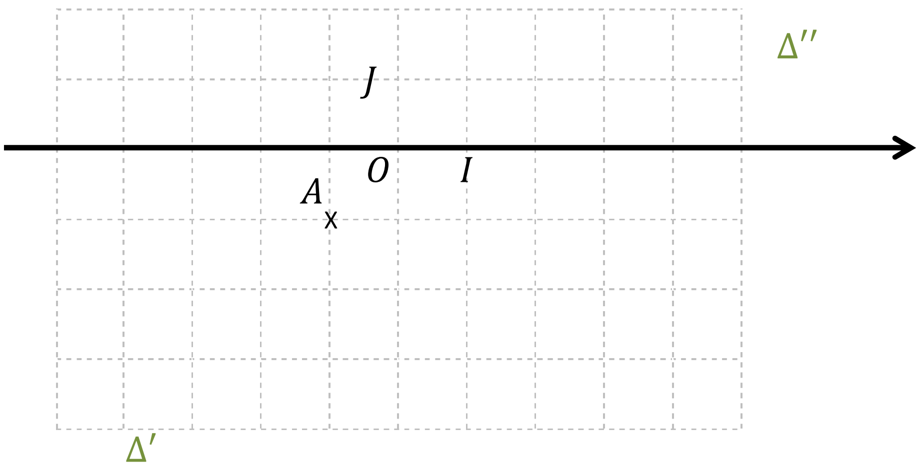
De même, D_3 et D_2 sont perpendiculaires.

Exercice 5 :

1. $f(x)$ est une fonction linéaire, elle passe donc par l'origine du repère.

Cherchons un deuxième point : Si $x = 2$ alors $y = 3$, elle passe donc par le point $(4; 3)$.





2. Cherchons l'équation de la droite (AB) :

(AB) est une fonction affine, elle admet donc une équation de la forme $y = ax + b$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-1)}{1-(-1)} = \frac{5}{2}$$

De plus, $A \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$. On a donc :

$$y_A = \frac{5}{2} \times x_A + b \Leftrightarrow -1 = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = -1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

On obtient donc :

$$(AB):\ \ y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

3. Les coordonnées du point d'intersection de Δ et de (AB) vérifient les deux équations. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2} & (1) \\ y = \frac{3}{2}x & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode par « élimination » : On fait la soustraction de la ligne (1) par la ligne (2)

On obtient :

$$y - y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Remplaçons x par cette valeur dans (2) :

$$y = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{9}{4}$$

Le point d'intersection de (AB) et Δ a donc pour coordonnées :

$$\left(-\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$$

4. Cherchons l'équation de la droite Δ', parallèle à Δ passant par A :

On sait que deux droites parallèles ont le même coefficient directeur donc :

$$\Delta' : \ y = \frac{3}{2}x + b$$

$A \in \Delta'$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = \frac{3}{2}x + b$. On a donc :

$$y_A = \frac{3}{2} \times x_A + b \Leftrightarrow -1 = -\frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = -1 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Et donc :

$$\Delta' : \ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

5. Cherchons l'équation de la droite Δ'', perpendiculaire à Δ passant par B :

On sait que le produit des coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires vaut -1. Donc le coefficient directeur a de Δ'' est tel que :

$$a \times \frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta'' : \ y = -\frac{2}{3}x + b$$

$B \in \Delta''$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = -\frac{2}{3}x + b$. On a donc :

$$y_B = -\frac{2}{3} \times x_B + b \Leftrightarrow 4 = -\frac{2}{3} + b \Leftrightarrow b = 4 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{14}{3}$$

Et donc :

$$\Delta'' : \ y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$$

6. On doit trouver deux points pour chacune des droites afin de les tracer.

Pour Δ' : Si $x = 1$ alors $y = 2$ et si $x = 3$ alors $y = 5$. Elle passe par les points de coordonnées : $(1;2)$ et $(3;5)$

Pour Δ'' : Si $x = 1$ alors $y = 4$ et si $x = 4$ alors $y = 2$. Elle passe par les points de coordonnées : $(1;4)$ et $(4;2)$

Trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites

Exercice 6 :

Il s'agit ici de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

- $1 + 2x = 3 - 4x \Leftrightarrow 2x + 4x = 3 - 1 \Leftrightarrow 6x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
  De plus, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
  Ainsi les coordonnées du point d'intersection de f et g sont $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$
- $\frac{3}{2} + 2x = x + 1 \Leftrightarrow 2x - x = 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
  De plus, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} + 2 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
  Ainsi les coordonnées du point d'intersection de f et g sont $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Exercice 7 :

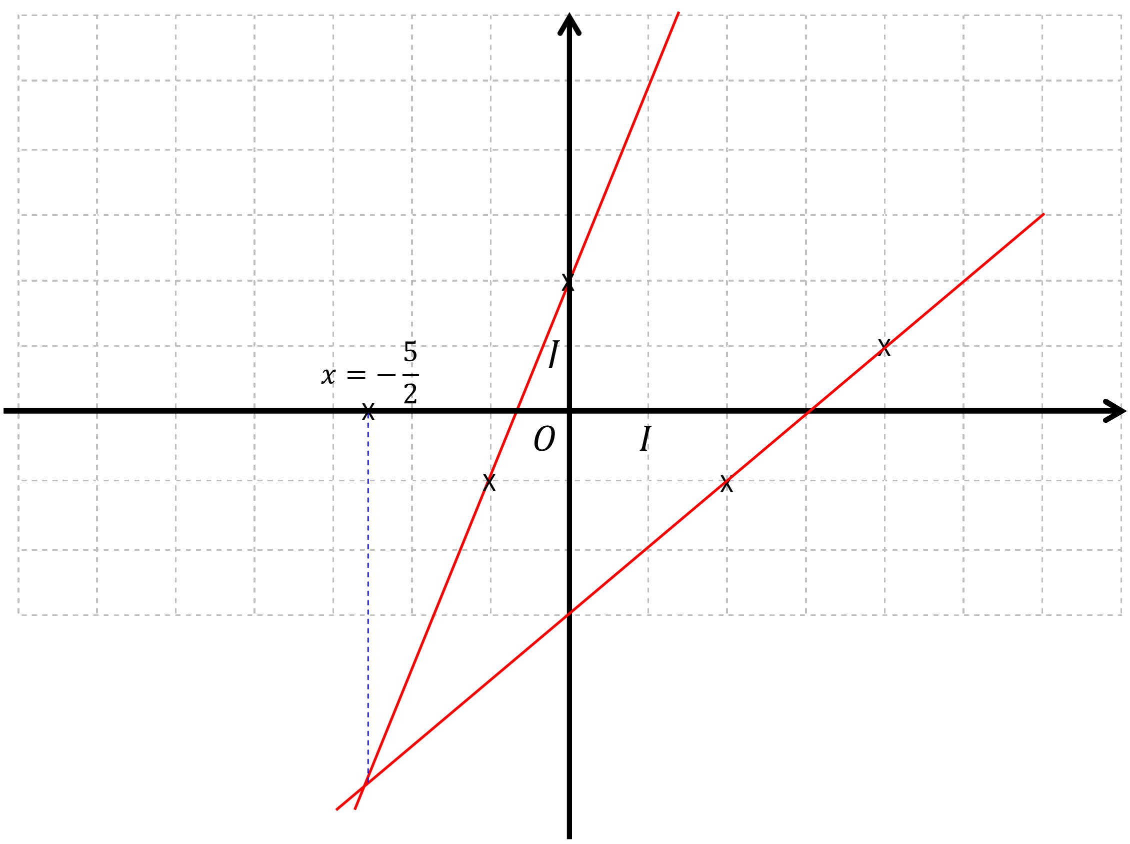
1. On résout $3x + 2 = x - 3$

$$3x + 2 = x - 3 \Leftrightarrow 3x - x = -3 - 2 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

2. On trace les droites d'équations $y = 3x + 2$ et $y = x - 3$ dans un repère et on cherche l'abscisse du point d'intersection (car on cherche la valeur de x).

Pour $y = 3x + 2$: Si $x = 0$ alors $y = 2$ et si $x = -1$ alors $y = -1$. Elle passe par les points de coordonnées : $(0; 2)$ et $(-1; -1)$

Pour $y = x - 3$: Si $x = 2$ alors $y = -1$ et si $x = 4$ alors $y = 1$. Elle passe par les points de coordonnées : $(2; -1)$ et $(4; 1)$



Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Exercice 8 :

Il suffit de déterminer le signe du coefficient directeur de la fonction concernée

Ici, $f(x) = \frac{4}{2} - \frac{2x}{2} = 2 - x$ donc $a = -1$: la fonction f est strictement décroissante

$g(x) = x + \frac{3}{2}$ donc $a = 1$: la fonction g est strictement croissante

Déterminer le signe d'une fonction affine

Exercice 9 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$. En effet l'ordonnée d'un point situé sur l'abscisse est nulle !

Il vous suffit ensuite d'utiliser le signe de a pour déterminer le signe de la fonction.

On a donc successivement :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$ De plus, puisque $a = 4 > 0$ la fonction f est croissante : elle sera donc négative sur $]-\infty\,, 2[$ et positive sur $]2\,, +\infty[$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{3} - \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow x = 6$ De plus, puisque $a = -\frac{1}{3} < 0$ la fonction f est décroissante : elle sera donc positive sur $]-\infty\,, 6[$ et négative sur $]6\,, +\infty[$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{7} = \frac{x}{7} \Leftrightarrow x = 5$ De plus, puisque $a = -\frac{1}{7} < 0$ la fonction f est décroissante : elle sera donc positive sur $]-\infty\,, 5[$ et négative sur $]5\,, +\infty[$

Exercice 10 :

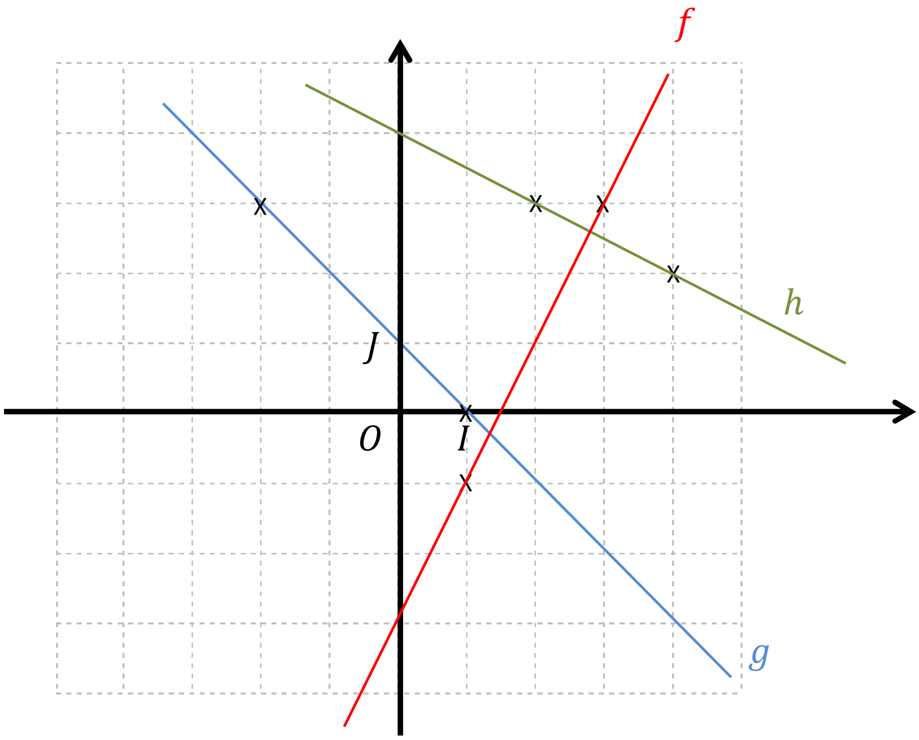
1. Cherchons deux points pour chacune des droites à tracer.

Pour f : Si $x = 1$ alors $y = -1$ et si $x = 3$ alors $y = 3$. Elle passe par les points de coordonnées :

$$(1; -1) \text{ et } (3; 3)$$

Pour g : Si $x = 1$ alors $y = 0$ et si $x = -2$ alors $y = 3$. Elle passe par les points de coordonnées : $(1; 0)$ et $(-2; -1)$

Pour h : Si $x = 2$ alors $y = 3$ et si $x = 4$ alors $y = 2$. Elle passe par les points de coordonnées : $(2; 3)$ et $(4; 2)$



2. Il suffit de regarder le signe du coefficient directeur de chacune des fonctions :

$f(x) = 2x - 3$ $a = 2 > 0$ donc f est une fonction strictement croissante	$g(x) = -x + 1$ $a = -1 < 0$ donc f est une fonction strictement décroissante	$h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc f est une fonction strictement décroissante

3. Tableau de signes de chacune des fonctions :

Pour f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Pour g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

Pour h :

x	$-\infty$	8	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$

Problèmes

Problème 1 :

Paul part en vacances. Sa vitesse moyenne sur route nationale est de 80 km/h. La consommation de son véhicule est de 5 litres aux 100 km.
Quand Paul est parti de chez lui, il lui restait 40 litres de carburant dans le réservoir.

a. Le véhicule consomme 5 litres aux 100, donc 2.5 litres pour 50 km (un simple produit en croix suffit à trouver). Il reste donc dans son réservoir $40 - 2.5 = 37.5$ litres d'essence.
b. En une heure, Paul parcourt 80 km : il a donc consommé 4 litres d'essence : il lui reste donc $40 - 4 = 36$ litres dans le réservoir
c. Le véhicule consomme 4 litres par heure donc :
$$f(t) = 40 - 4 \times t$$
d. Le réservoir sera à sec lorsque l'on aura $f(t) = 0 \Leftrightarrow 40 - 4t = 0 \Leftrightarrow 4t = 40 \Leftrightarrow t = 10$, donc au bout de 10 heures de conduite. Paul aura parcouru $80 \times 10 = 800$ km
e. On cherche à quel moment le réservoir de Paul a contenu $60 - 32 = 28$ litres d'essence. Pour ce faire, on résout $f(x) = 28 \Leftrightarrow 40 - 4t = 28 \Leftrightarrow 4t = 12 \Leftrightarrow t = 3$
La distance séparant Paul de la pompe est ainsi de $3 \times 80 = 240$ km

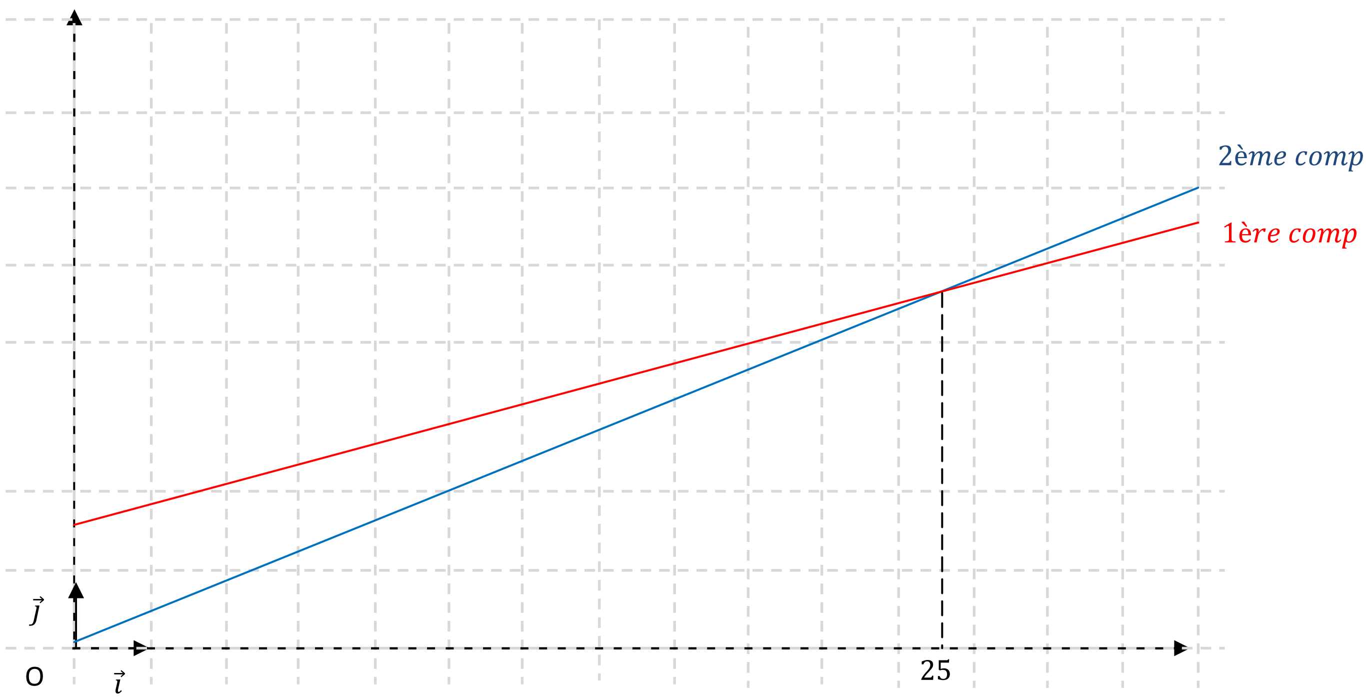
Problème 2 :

a. Avec la première compagnie il paiera $5 + 0.4 \times 10 = 9$ euros
Avec la deuxième compagnie il paiera $0.6 \times 10 = 6$ euros
Il lui donc mieux choisir la deuxième compagnie

b. Avec la première compagnie il paiera $5 + 0.4 \times 30 = 17$ euros
Avec la deuxième compagnie il paiera $0.6 \times 30 = 18$ euros
Il lui donc mieux choisir la première compagnie

c. On a directement :
$f(x) = 5 + 0.4x$
$g(x) = 0.6x$

d. On peut choisir par exemple comme échelle 1 carreau = 2 km en abscisse et 1 carreau= 3 euros en ordonnée. Remarquez qu'il n'est pas judicieux dans le contexte de représenter des x (ici des km) ni des y (ici des euros) négatifs.



e. On constate qu'il vaut mieux choisir la première compagnie pour un trajet inférieur à 25 km, la seconde pour un trajet supérieur.

f. Il faut résoudre $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5 + 0.4x = 0.6x \Leftrightarrow 0.2x = 5 \Leftrightarrow x = 25$
On pourra choisir l'une ou l'autre des compagnie pour un trajet égal à 25 km.

g. Il s'agit de résoudre successivement $f(x) = 15$ puis $g(x) = 15$
Ce qui donne $f(x) = 15 \Leftrightarrow 5 + 0.4x = 15 \Leftrightarrow 0.4x = 10 \Leftrightarrow x = 25$
Et $g(x) = 15 \Leftrightarrow 0.6x = 15 \Leftrightarrow x = 25$
Il pourra choisir indifféremment l'une ou l'autre des deux compagnies : avec 15 euros, il parcourra exactement 25 km

<u>Problème 3</u> :

Il faut traduire chaque contrat en une fonction affine.

Soit x le supplément par programme réalisé. y représente le salaire.

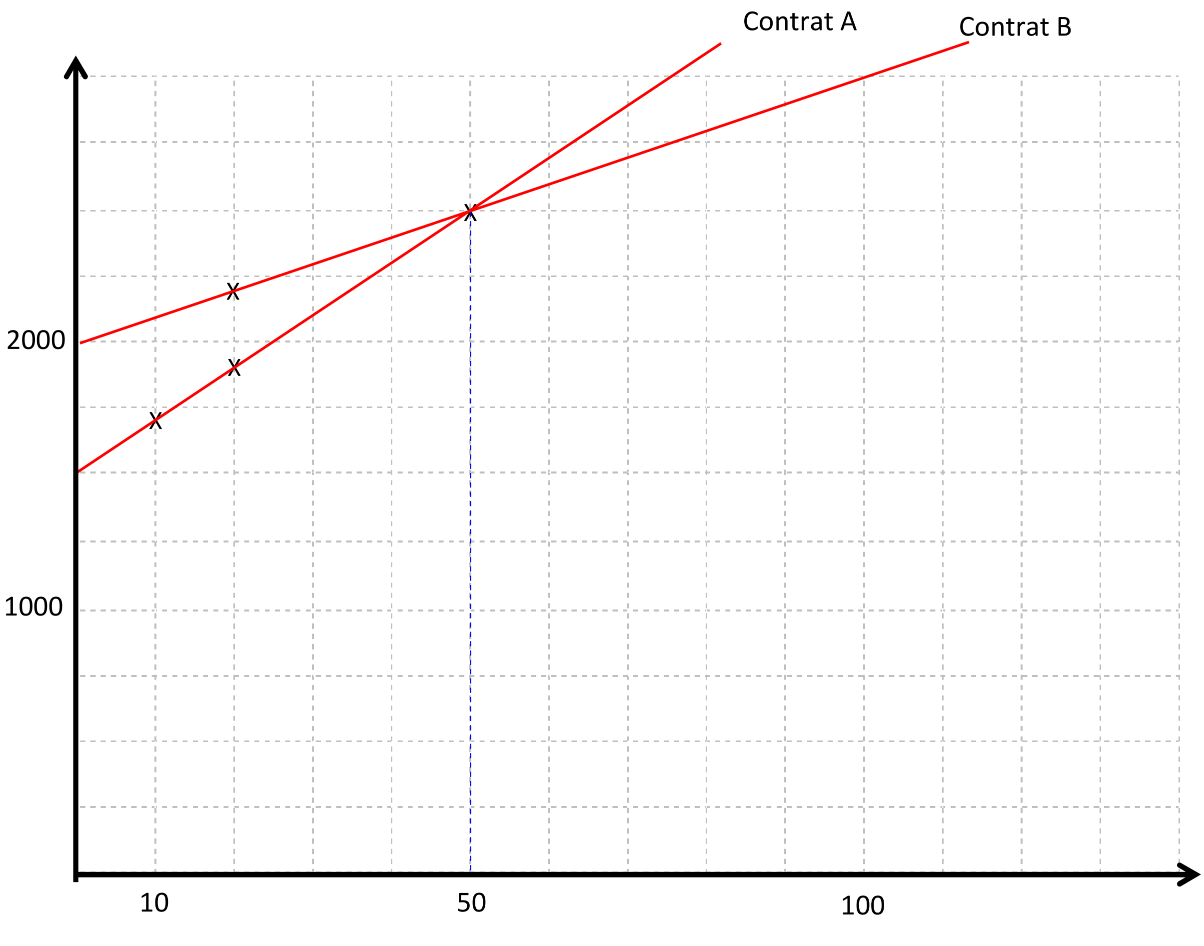
Contrat A : $y = 20x + 1500$

Contrat B : $y = 7x + 2000$

Regardons ce que donnent ces fonctions dans un repère (Sur x : 1 pour 10 ; sur y : 1 pour 500):

<u>Pour $y = 20x + 1500$</u>: Si $x = 20$ alors $y = 2100$ et si $x = 10$ alors $y = 1700$. Elle passe par les points de coordonnées : $(20; 1900)$ et $(10; 1700)$

<u>Pour $y = 10x + 2000$</u>: Si $x = 20$ alors $y = 2200$ et si $x = 50$ alors $y = 2500$. Elle passe par les points de coordonnées : $(20; 2200)$ et $(50; 2500)$



Le contrat B est moins intéressant à partir de 50 programmes effectués.