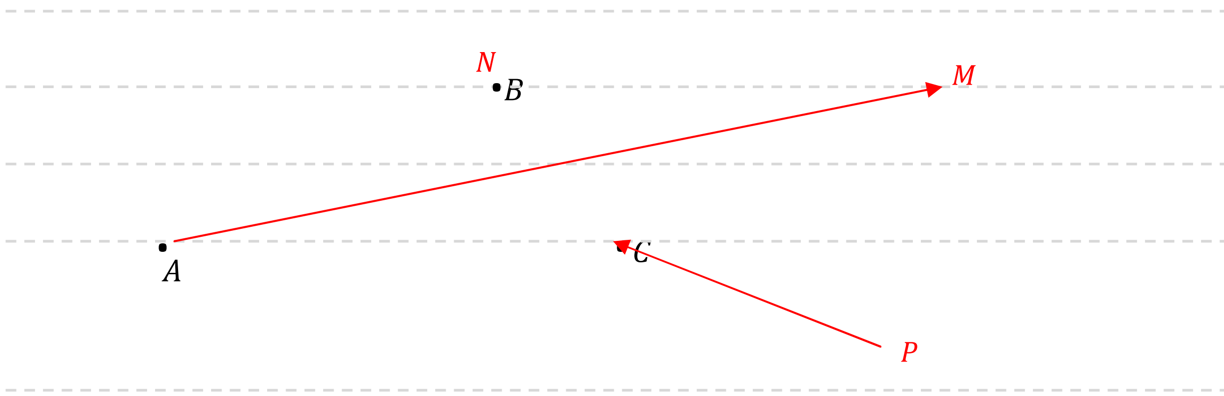
Corrigés des exercices

Représenter des vecteurs graphiquement

Exercice 1 :



Démontrer à l'aide de la relation de Chasles

Exercice 2 :

Il s'agit de démontrer par exemple que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Exercice 3 :

Il s'agit de démontrer par exemple que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Puisque par hypothèse on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Ainsi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED}$

Ainsi le quadrilatère $BCDE$ est bien un parallélogramme.

Exercice 4 :

1. On donne $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

   On peut présenter cette relation sous la forme $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$

   Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et les points A, B et M sont bien alignés.
2.
   a. A l'aide de la relation de Chasles, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$

   b. D'après la relation précédente, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$ et donc puisque $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$ on a $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et pour finir $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

   c. Tracez un segment de 5cm de longueur, placez les points A et B à son extrémité : le point M est sur le segment, à une distance de 3cm du point A

Utiliser les coordonnées de vecteurs

Exercice 5 :

Pour que $ABCM$ soit un parallélogramme, on doit avoir par exemple $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$

En coordonnées, cela donne

$$\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_C-x_M \\ y_C-y_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-x_M \\ 2-y_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_D-x_A \\ y_D-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{3}{2}-(-2) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_D-1 \\ y_D-(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{3}{2}-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ \frac{9}{2}-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et ainsi le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Remarque : il peut être utile de faire un dessin pour constater que $ABDC$ n'est pas un parallélogramme particulier (losange, rectangle ou carré) et ne pas se lancer dans des calculs qui ne mèneraient à rien.

Exercice 7 :

1. Les coordonnées de I sont

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{2} = -\frac{1}{24}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{7}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

2. La question signifie que B est le milieu du segment $[AS]$ donc :

$$x_B = \frac{x_A + x_S}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} = \frac{\frac{3}{4} + x_S}{2} \Leftrightarrow x_S = -\frac{29}{12}$$

$$y_B = \frac{y_A + y_S}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{6} = \frac{-\frac{1}{3} + y_S}{2} \Leftrightarrow y_S = \frac{8}{13}$$

3. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB = \sqrt{\left(-\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{6} - (-\frac{1}{3})\right)^2} = \sqrt{\frac{685}{144}}$

Exercice 8 :

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$ sont $\binom{-4-x_G}{3-y_G}$

   Les coordonnées de $\overrightarrow{GB}$ sont $\binom{3-x_G}{-2-y_G}$

   Les coordonnées de $\overrightarrow{GC}$ sont $\binom{-5-x_G}{-4-y_G}$

2. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \binom{-4-x_G}{3-y_G} + \binom{3-x_G}{-2-y_G} + \binom{-5-x_G}{-4-y_G} = 0$

   C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -4 - x_G + 3 - x_G - 5 - x_G = 0 \\ 3 - y_G - 2 - y_G - 4 - y_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 - 3x_G = 0 \\ -3 - 3y_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -2 \\ y_G = -1 \end{cases}$$

   Ainsi les coordonnées de G sont $(-2\ ;\ -1)$

3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ a pour coordonnées :

$$\binom{-4 - x_M}{3 - y_M} + \binom{3 - x_M}{-2 - y_M} + \binom{-5 - x_M}{-4 - y_M} = \binom{-4 - 5 + 3 - 5 - 5 - 5}{3 - 6 - 2 - 6 - 4 - 6} = \binom{-21}{-21}$$

   $3\overrightarrow{MG}$ a pour coordonnées

$$3 \times \binom{-2 - 5}{-1 - 6} = \binom{-21}{-21}$$

   On constate que les coordonnées sont identiques, c'est-à-dire que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

4.
   a. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$

   b. De la même manière, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$.

   Ainsi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

   Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

   Donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Ce résultat reste vrai quel que soit la position du point M (vérifiez le en posant $M = A$ par exemple.)

Remarque : le point G tel que l'on ait la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ est appelé centre de gravité du triangle ABC.

Utiliser la colinéarité de vecteurs

Exercice 9 :

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont
$$\begin{pmatrix} 7-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont
$$\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -3-(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
Par ailleurs, on constate que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, donc les vecteurs sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont
$$\begin{pmatrix} 7-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont
$$\begin{pmatrix} 15-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Par ailleurs, on constate que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.

Exercice 10 :

1. Autrement dit, B est le milieu du segment $[AM]$ et C le milieu du segment $[AN]$
Ainsi, $x_B = \frac{x_A+x_M}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{-2+x_M}{2} \Leftrightarrow x_M = -2+2 = 0$ et $y_B = \frac{y_A+y_M}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{1+y_M}{2} \Leftrightarrow y_M = 8-1 = 7$
Et $x_C = \frac{x_A+x_N}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-2+X_N}{2} \Leftrightarrow x_N = 4+2 = 6$ et $y_C = \frac{y_A+y_N}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{1+y_N}{2} \Leftrightarrow y_N = 6-1 = 5$
Donc les coordonnées recherchées sont $M(0\,;7)$ et $N(6\,;5)$
2. a.
$$\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - (-2) \\ y_P - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P + 2 \\ y_P - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P + 2 = -3 \\ y_P - 1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -5 \\ y_P = -8 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q - x_A \\ y_Q - y_A \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q - (-2) \\ y_Q - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q + 2 \\ y_Q - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q + 2 = -12 \\ y_Q - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -14 \\ y_Q = -5 \end{cases}$$

b. $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\binom{6-0}{5-7} = \binom{6}{-2}$

$\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\binom{-14-(-5)}{-5-(-8)} = \binom{-9}{3}$

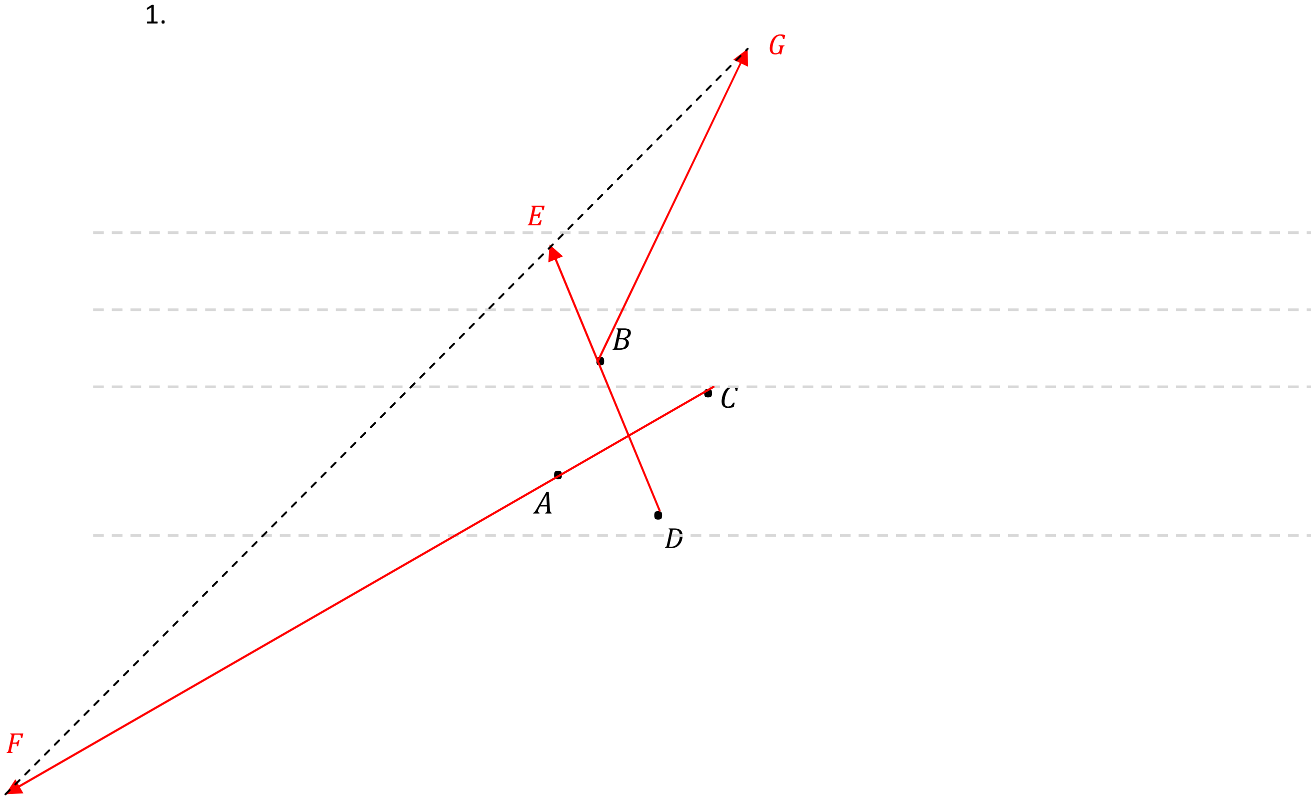
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires (car $6 \times 3 - (-2) \times (-9) = 18 - 18 = 0$.

Ainsi les droites (MN) et (PQ) sont parallèles

Problèmes

Problème 1 :

1.



2.

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DB}$$
$$= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GC} + 5\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BA}$$
$$= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BA} = -9\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{CB} =$$
$$= -9\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{DA} = -9\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{AD}$$
$$= -8\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AD} = -8\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD}$$

3. On constate que $\overrightarrow{GF} = 4\overrightarrow{GE}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.

<u>Problème 2</u> :

Il est essentiel ici de faire un dessin, même au brouillon et peu précis afin de se donner une idée du repère en question.

1. On se trouve ici dans une configuration de Thalès, ainsi on a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
   Ainsi on a $M(0\,,\frac{1}{3})$; $N(\frac{2}{3}\,,0)$ et $D(\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3})$
   (en effet $AMDN$ est un parallélogramme)
2. Les coordonnées du point K sont
$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$
$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
   Donc les coordonnées de $\overrightarrow{BK}$ sont :
$$\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   Et les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ sont :
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-0 \\ 0-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
   On constate que $\overrightarrow{BK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les droites (BK) et (MN) sont parallèles.

<u>Problème 3</u> :

1.
   a. Les coordonnées de B sont $(0\,;0)$
      Les coordonnées de C sont $(1\,;0)$
      Les coordonnées de D sont $(1\,;1)$

Les coordonnées de A sont $(0\,;1)$

b. La hauteur issue de E coupe le segment $[BC]$ en son milieu. D'après Pythagore, cette hauteur a pour mesure $\sqrt{BE^2 - (\frac{1}{2}BC)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les coordonnées de E sont donc $(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

c. Le triangle CFD a les mêmes mesures que BCE donc les coordonnées de F sont $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2})$

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$ sont $\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On peut écrire $\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3} - 2)\,\overrightarrow{AF}$ (posez le système pour vous en convaincre)

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc les points A, E et F sont alignés.