Exercices

Calculer des primitives

Exercice 1 :

Trouver **une** primitive des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$f_2(x) = 12x^{17} - 2x^3 - x$$

$$f_3(x) = 3x(x^2 - 1)^3$$

$$f_4(x) = \frac{7}{\sqrt{2x+3}}$$

$$f_5(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f_6(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$$f_8(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}$$

$$f_9(x) = \tan^2 \mathrm{x} - \frac{\cos x}{2}$$

Exercice 2 :

Calculez une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{5x^4 + 2x^3 - 3x + 6}{x^3}$$

$$h(x) = \frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^2}$$

$$i(x) = \frac{2}{3(2x+3)^2}$$

Rappel : la fonction $\frac{1}{x^n}$ peut également s'écrire x^{-n}

Exercice 3 :

Déterminez la primitive F de $f(x)=\frac{4x^3+x+2}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ qui prend la valeur 2 pour $x=1$

Exercice 4 :

Calculez la primitive vérifiant la condition initiale des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ vérifiant $F(1)=1$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ vérifiant $G(0)=1$

$h(x)=\cos x+\sin x$ vérifiant $H\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

Calculer des intégrales

Exercice 5 :

Calculez les intégrales proposées :

$$\int_0^2 (x+4-2e^x)dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$

Exercice 6 :

Calculez les valeurs des intégrales $F(x)=\int_0^x \frac{2}{(t-1)^2}dt$ et $G(x)=\int_{-1}^x \frac{2e^t}{(e^t-1)^2}dt$ en précisant les valeurs de x pour lesquelles ces intégrales sont définies.

Intégrales et suites

Exercice 8 :

Soit n un entier strictement positif et $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. Démontrez que $I_n \geq 0$, puis calculez I_1
2. Démontrez que pour tout $n > 0$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$
   On pourra utiliser une intégration par parties
3. Déduisez de ce qui précède les valeurs de I_2 et I_3

Problèmes

Problème 1 :

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)e^{x+1}$
   a. Déterminez en unités d'aires l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
   b. En supposant que l'unité soit $2cm$, déterminez l'aire précédente en cm^2
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}$
   a. Montrez que la droite Δ d'équation $y = -x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f
   b. Déterminez l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, la droite Δ et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Problème 2 :

1. Justifiez l'existence des intégrales suivantes :
   $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$
2. Calculez $I + J$ et $J - I$
3. Déduisez en les valeurs de I et J

Problème 3 :

On considère la suite d'intégrales de premier terme I_0 et de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$$

1. Calculez I_1, puis $I_0 + I_1$. Déduisez en la valeur de I_0.
2. Calculez $I_n + I_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
3. Démontrez sans calcul que la suite (I_n) est croissante
4. Prouvez que pour tout $x \in [0\,;1]$ on a l'encadrement :

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

Déduisez en un encadrement de I_n

5. A l'aide de cet encadrement, déterminez la limite de I_n, puis celle de $\frac{I_n}{e^n}$