Exercices

Dresser un tableau de variations

<u>Exercice 1</u> :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

1. Etudiez la fonction u : limites aux bornes et variations puis dressez le tableau complet des variations de u.
2. Déterminez les points d'intersection de la courbe de u avec les axes du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

<u>Exercice 2</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Déterminez les réels a, b et c pour que l'on ait simultanément :
   - f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ en $x_0 = 2$
   - La courbe de f passe par le point $A\,(3, 1)$
   - La tangente à la courbe de f en A a pour coefficient directeur -2
2. Etudiez complètement la fonction f ainsi obtenue.

Etudier la parité d'une fonction

<u>Exercice 3</u> :

Etudiez la parité des fonctions suivantes :

$\frac{1+x^2}{x^2}$ et $\frac{2x}{1+x^2}$

Déterminer un axe ou un centre de symétrie

<u>Exercice 4</u> :

- Démontrez que droite verticale d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

- Démontrez que le point $A(2, 1)$ est centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$

Exercice 5 :

Démontrez que la droite d'équation $x = -2$ est axe de symétrie de la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 4x + 5}$$

Exercice 6 :

Démontrez que le point $A\ (1\ , -3\ )$ est centre de symétrie de la courbe de la fonction v définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$v(x) = \frac{3x + 1}{-x + 1}$$

Etudier la position relative de deux courbes

Exercice 7 :

- Etudiez la position relative des droites $D_1 : y = 3x - 2$ et $D_2 : y = 1 - 2x$
- Etudiez la position relative des courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ et $g(x) = x^2 + 3x + 4$

Etudier une fonction

Problème 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\ , \vec{\imath}\ , \vec{\jmath}\ )$

1. Etudiez les limites de f en 1. Interprétez graphiquement ce résultat.
2. a) Déterminez les réels a, b et c tels que l'on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

   b) Déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Etablissez que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

   c) Etudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ
3. Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

<u>Problème 2</u> :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$

1. Donner son ensemble de définition D_f.
2. Etudier la parité de f.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Donner le signe de f'.
5. En déduire le sens de variations de f.
6. Construire le tableau de variations de f.
7. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
8. Donner les équations des éventuelles asymptotes.
9. Donner les équations des tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.