Exercices

Utiliser les formules de base

Exercice 1 :

Simplifiez au maximum les écritures suivantes :

$$\ln\frac{6}{32} - 4\ln 2 \qquad\qquad 7\ln e^3 + 5\ln(\frac{1}{e})^3$$

Déterminer un ensemble de définition

Exercice 2 :

Précisez l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(-3x^2 + 5x - 2)$

$g(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$

$h(x) = \sqrt{1 + \ln x}$

Résoudre une équation

Exercice 3 :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln x = \frac{7}{4}$$

$$\ln\left(\frac{1}{9 - x^2}\right) = -2$$

$$\ln x + \ln(x - 3) = 2\ln 2$$

Exercice 4 :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\ln(x + 2) = \ln(8 - 2x)$

$\ln(2x + 1) + \ln(x - 1) = \ln 2$

$2\ln x = \ln(\frac{4x+3}{2x+5})$

Résoudre une inéquation

Exercice 5 :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\ln(\frac{2x+1}{x-2}) \leq 0$

$(\ln x)^2 - 3\ln x \geq 4$

$(\ln x)^3 - 25\ln x \geq 0$

Calculer une dérivée

Exercice 6 :

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$-x^2 + 2 + \ln x$

$\frac{\ln x}{x} - x$

$x(1-\ln x)^2$

$\ln(3x+5)$

Exercice 7 :

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$x\ln x$

$x^2\ln(1+x)$

$\ln(\frac{2+x}{2-x})$

$e^{x\ln(1-x^2)}$

Calculer une limite

Exercice 8 :

Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{x-1}{x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - \ln x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln (e^{2x} - e^x + 1)$$

Problème

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. On donne par ailleurs la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$. Etudiez les variations de g, puis son signe sur $\mathbb{R}_+^*$
2. En utilisant la question précédente, étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dressez son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}$
4. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x$. Etudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$
5. Montrez qu'il existe un point unique A de $\mathcal{C}$ ou la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{D}$. Calculez les coordonnées de ce point.