Exercices

Démontrer par récurrence

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1. Démontrez par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.
2. Etudiez le sens de variation de (U_n). (une récurrence est conseillée)

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n}$

Démontrez par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (U_n) est une suite positive

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

1. Calculez les 6 premiers termes de la suite
2. Emettez une conjecture pour l'expression de U_n en fonction de n
3. Démontrez cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence

Exercice 4 :

- Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$

- Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

- Démontrez l'inégalité de Bernoulli
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

- Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9

- Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$, $U_1 = 3$ et $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$
Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n + 1$

Etudier des suites adjacentes

Exercice 5 :

Parmi les suites qui suivent, déterminez lesquelles sont adjacentes :

$U_n = \frac{3n+4}{n+2}$ et $V_n = \frac{4n^2+1}{n^2+1}$

$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ et $V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$U_n = 1 + \frac{1}{n!}$ et $V_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 6 :

Dans chacun des cas suivants, dire si les suites (U_n) et (V_n) ont même limite et si oui sont elles adjacentes ?

- $U_n = 1 - 10^{-n}$ et $V_n = 1 + 10^{-n}$
- $U_n = \ln(n+1)$ et $V_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$
- $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Etudier la convergence d'une suite

Exercice 7 :

- Démontrez la suite $U_n = \frac{n+3}{n^2}$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et donnez sa limite
- Démontrez la suite $U_n = 2 - (\frac{3}{5})^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et donnez sa limite
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1 \end{cases}$$

On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{2} < U_n$

1. Etudiez le sens de variation de (U_n)
2. En déduire que cette suite est bien convergente
3. Déterminez par le calcul la limite de la suite (U_n)

Exercice 8 :

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 5}{U_n + 1} \end{cases}$$

1. Représentez graphiquement les 5 premiers termes de la suite (U_n)

On suppose dans ce qui va suivre que pour tout entier naturel n, $U_n > 5$.

2. Démontrez que la suite (U_n) est strictement décroissante
3. Démontrez que la suite (U_n) est convergente et calculez sa limite.

Exercice 9 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = a$ et $U_{n+1} = U_n(2 - U_n)$, où a est un réel tel que $0 < a < 1$

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$
   a. Calculez U_1 et U_2
   b. Représentez dans un repère orthonormal U_1, U_2 et U_3
2. On suppose désormais que a est un réel quelconque compris entre 0 et 1
   a. Démontrez par récurrence que pour tout entier n, $0 < U_n < 1$
   b. Démontrez que la suite (U_n) est croissante
   c. Déduisez de ce qui précède la convergence de (U_n)
3. Supposons de nouveau que $a = \frac{1}{8}$ et considérons la suite $V_n = 1 - U_n$
   a. Exprimez pour tout entier n, V_{n+1} en fonction de V_n
   b. Déduisez en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (\frac{7}{8})^{2^n}$
   c. Déterminez la limite de la suite (V_n), puis celle de la suite (U_n)

Exercice 10 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$.

1. Démontrez par récurrence que la suite (U_n) est minorée par 3
2. Montrez que pour tout entier n,
$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n + 2)(U_n - 3)}{\sqrt{U_n + 6} + U_n}$$
3. Déduisez en que la suite (U_n) est décroissante
4. Montrez que la suite (U_n) est convergente. On note l sa limite.
5. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

Exercice 11 :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{3x-2}$

1. Tracez la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormal, ainsi que la droite d'équation $y = x$
2. Représentez graphiquement les 4 premiers termes de la suite définie par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$
3. Montrez que la suite (U_n) est minorée par 2
4. Montrez que la suite (U_n) est décroissante
5. Démontrez que la suite (U_n) est convergente. On note l sa limite.
6. Démontrez que $l \geq 2$
7. Démontrez que l vérifie l'équation $l = \sqrt{3l-2}$
8. Déterminez la valeur de l

Exercice 12 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2 + U_n} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel, $U_n > 0$
2. Exprimer $U_{n+1} - 2$ et $U_{n+1} - 3$ en fonction de U_n. En déduire que l'on a $2 < U_n < 3$ pour tout entier naturel n **non nul**.
3. Etudier le sens de variation de (U_n) et montrer que cette suite est convergente

Problème

On définit pour tout entier $n > 0$ la suite (U_n) de nombre réels strictement positifs par :

$$U_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. Pour tout naturel $n > 0$, on pose $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
   a. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$
   b. Montrez que pout tout $n > 0$ $V_n > \frac{1}{2}$
   c. Trouvez le plus petit entier $N \leq n$ tel que $V_n < \frac{3}{4}$
   d. En déduire que si $n \geq N$ alors $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

2. On pose pour tout $n \geq 5$, $S_n = U_5 + U_6 + \ ... + U_n$. On se propose d'étudier la convergence de la suite (S_n)
   a. Montrez par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$
   $$U_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times U_5$$
   b. Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 5$
   $$S_n \leq [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \ ... + (\frac{3}{4})^{n-5}] \times U_5$$
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$
   $$S_n \leq 4U_5$$
3. Montrez que la suite (S_n) est croissante et en déduire qu'elle converge