Exercices

Utiliser des variables aléatoires réelles

Exercice 1 :

On lance 4 fois de suite une pièce bien équilibrée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenues.

1. Déterminez la loi de probabilité de X
2. Calculez son espérance mathématique

Exercice 2 :

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules vertes. On tire 2 boules en replaçant la première dans l'urne avant de tirer la deuxième. On suppose tous les tirages de 2 boules équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1. Donnez la loi de probabilité de X
2. Calculez son espérance, puis son écart type

Exercice 3 :

Dans une urne se trouvent 10 boules indiscernables au toucher : 6 blanches et 4 rouges. On tire une boule l'une après l'autre sans remise.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules rouges tirées avant de tirer une boule blanche.

1. Déterminer le nombre de valeurs que peut prendre X
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. En déduire son espérance et interpréter ce résultat.
4. Calculer sa variance

Utiliser la loi binomiale

Exercice 4 :

On jette en l'air une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On s'arrête dès que l'on obtient pile ou bien dès que l'on obtient 3 face d'affilée.

Soient X la variable aléatoire associée au nombre de face obtenus et Y la variable aléatoire associée au nombre de lancers effectués.

Déterminer les lois de probabilités de X et Y

<u>Exercice 5</u> :

On lance en l'air une seule fois une pièce parfaitement équilibrée. Soit X le nombre de fois où cette pièce tombe sur le coté face.

La variable X suit elle une loi de probabilité ? Donner le ou les éventuels paramètres de cette loi.

<u>Exercice 6</u> :

On lance une pièce parfaitement équilibrée à 10 reprises. Les lancers sont indépendants les uns des autres. Soit X le nombre de fois où cette pièce tombe sur le coté face.

1. La variable X suit elle une loi de probabilité ? Si oui donner le ou les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : 'obtenir exactement 4 fois face lors de ces 10 lancers'

3. Calculer la probabilité de l'évènement : 'obtenir exactement 4 fois pile lors de ces 10 lancers'

4. Calculer la probabilité de l'évènement : 'obtenir au moins une fois face lors de ces 10 lancers'

5. Calculer la probabilité de l'évènement : 'obtenir au plus 9 fois face lors de ces 10 lancers'

6. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

7. Supposons maintenant que cette pièce soit lancée n fois. Déterminer la probabilité de l'évènement 'obtenir au moins une fois face lors de ces n lancers', puis calculer la plus petite valeur pour laquelle cette probabilité est supérieure à $0{,}9$'

<u>Exercice 7</u> :

Un Q.C.M comporte 5 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à chacune des questions. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de bonnes réponses.

1. Combien de valeurs peut prendre X ?
2. Comment appelle t'on la loi de probabilité de X ? Déterminer les paramètres de cette loi, ainsi que son espérance et sa variance.
3. Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise enlève 1 point. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus par l'élève. Exprimer Y en fonction de X puis en déduire $E(Y)$
4. Reprendre les questions précédentes en supposant que l'élève sait répondre correctement à deux questions sur les 5 (pas corrigé)

Problèmes

Problème 1 :

Dans un immeuble de 5 étages est installé un ascenseur. Une étude a montré que lorsqu'il est à l'arrêt, dans 50% des cas il est au rez-de-chaussée. Sinon il a autant de chances d'être à l'un quelconque des 5 étages.

1. Définissez une loi de probabilité modélisant cette situation
2. Il faut 2 secondes à l'ascenseur pour démarrer, 2 secondes pour s'arrêter et 4 secondes pour parcourir un étage
   Soit T la variable aléatoire égale au temps d'attente lorsque, l'ascenseur étant à l'arrêt, on l'appelle du rez-de-chaussée.
   a. Donnez la loi de probabilité de T
   b. Calculez son espérance. Donnez une interprétation de ce résultat.

Problème 2 :

On pratique une expérience sur le comportement d'un rongeur au cœur d'un labyrinthe.

Ce dédale contient 6 portes dont seulement 2 amèneront le rongeur vers la sortie. Si le rongeur choisit l'une des quatre autres portes, il subit un choc électrique et est ramené jusqu'au point de départ et ce jusqu'à ce qu'il parvienne à se sortir du labyrinthe.

A. Le rongeur n'a pas de mémoire : il choisira donc à chaque étape la porte de manière équiprobable.
   1. Déterminer la probabilité que le rongeur trouve une sortie du premier coup.
   2. Déterminer la probabilité que le rongeur trouve une sortie au bout du 5$^{\text{ème}}$ essai.
   3. Généraliser au $n^{ième}$ essai
B. Le rongeur a une excellente mémoire : il est capable de se souvenir de son mauvais choix précédent, élimine donc cette porte et choisit de manière équiprobable parmi les portes restantes.
   Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'essais du rongeur
   1. Déterminer les différentes valeurs que peut prendre X
   2. Déterminer la loi de probabilité de X
   3. Calculer l'espérance de X. Donnez une interprétation de cette quantité.

Problème 3 :

Un couple souhaite avoir un garçon. On estime qu'à la naissance la probabilité d'avoir un garçon est de 0,51. Combien d'enfants au minimum devra avoir ce couple pour être certain que parmi tous ceux-ci il y ait au moins 99% de chances de trouver un garçon ?

Question bonus (hors programme) : même données avec cette question : combien de filles pourra avoir cette famille avant que la probabilité d'avoir un garçon devienne au moins 0.99 ?

(noter que 'avant d'avoir un garçon' est la loi géométrique qui s'arrête des l'obtention du succès on pourra l'énoncer)

<u>Problème 4</u> :

Une association organise des promenades en montagne. 12 guides emmènent chacun pour la journée un groupe de personnes dès le lever du soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est de $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

1.
   a. Montrez que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0.20 et 0.21
   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours ou les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
   c. Donnez la signification des évènements $X = 30$ et $X = 0$ et calculez la probabilité de ces évènements.
   d. Déterminez l'espérance mathématique $E(X)$. Quelle signification pouvez vous donner à ce résultat ? Calculez ensuite l'écart type $\sigma(X)$
   e. Un montant d'un euro est demandé à chaque groupe pour la journée. Un groupe ne se présentant pas n'a pas à régler ce montant. On nomme S la variable aléatoire égale à la somme perçue par l'association un jour donné.
      Calculez la probabilité de l'évènement $[S = 11]$
      Donnez l'espérance mathématique de S

2.
   a. Agacé par le nombre d'annulations, l'association décide d'ouvrir un groupe supplémentaire, sans recruter de guide en plus. Si d'aventure les 13 groupes se présentent, le 13ème sera redirigé vers une activité de substitution. Néanmoins cette activité coute 2euros à l'association.
      Calculez la probabilité P_{13} qu'un jour donné les 13 groupes inscrits se présentent au départ de la promenade.
   b. Soit R la variable aléatoire égale au cout de l'activité de substitution. Précisez sa loi, puis calculez son espérance mathématique.
   c. Montrez que le gain moyen obtenu pour chaque jour est

$$\sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13}$$

      Calculez ce gain.
   d. La décision du dirigeant est elle rentable pour l'association ?