Exercices

Calcul dans $\mathbb{C}$: utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Exercice 1 :

Déterminez le conjugué du nombre complexe suivant, puis déterminez $Re(\bar{z})$ et $Im(\bar{z})$

$$z = \frac{i}{i-2} + \frac{4}{6-3i}$$

Exercice 2 :

Calculez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z = \frac{3}{7i} \qquad z = \frac{3+4i}{1-2i}$$

$$z = \frac{3+i}{(4+2i)+(5-i)} \qquad z = \frac{3+4i}{(1+2i)^2}$$

$$z = \frac{\frac{1+i}{1-i} - 2}{\frac{2}{1-i} + 4}$$

Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe

Exercice 3 :

Déterminez le module et l'argument des nombres complexes, suivants. Vous en déduirez ensuite leur forme trigonométrique ainsi que leur forme exponentielle.

$$z_1 = -3 - \sqrt{3}i$$

$$z_2 = -2i(2+2i)$$

Exercice 4 :

On pose

$$z_A = \sqrt{3} + i \qquad z_B = \sqrt{3} - i \qquad z_C = 2\sqrt{3} + 2i \qquad z_D = 2i$$

Soit $Z_1 = \frac{z_A}{z_C}$ et $Z_2 = z_B \times z_D$

1. Calculez le module et un argument de z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Calculez le module et un argument de Z_1 et Z_2.
3. Calculez le module et un argument de ${Z_1}^4$ et ${Z_2}^3$.

<u>Exercice 5</u> :

On considère les complexes $z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$ et $z_2 = 2 - 2i$

1. Ecrivez $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2. Donnez une forme exponentielle de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

<u>Exercice 6</u> :

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\frac{1 + iz}{z + i} = 1 + i$$

$$iz + 2\bar{z} = 2i - 3$$

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

<u>Exercice 7</u> :

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$-3z^2 + 6z + 1 = 0$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$(z - 2i)(2z^2 - 3z + 5) = 0$$

$$z(z^2 + 1)(z^2 - 3) = 0$$

<u>Exercice 8</u> :

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$iz - 3 = z + 2i + (3i + 1)z$$

$$\frac{z-2}{z+i} = -i$$

$$3z(z+i) = -iz$$

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

$$\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1+4i \end{cases}$$

$$\begin{cases} iz - 3z' = -7+4i \\ (1+i)z + 2iz' = 2+6i \end{cases}$$

Etudier la nature d'une configuration géométrique

<u>Exercice 9</u> :

On donne dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ les points A, B, C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + i\sqrt{3}\,;\, z_B = -1 - i\sqrt{3}\,;\, z_C = 2$

Déterminez la forme trigonométrique de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis déduisez en la nature du triangle ABC.

<u>Exercice 10</u> :

On considère les nombres complexes :

$-1+i$ $\quad$ $3(1+i)$ $\quad$ 2

1. Ecrivez ces nombres sous forme trigonométrique.
2. On désigne par a, b et c ces 3 nombres vérifiant $|a| < |b| < |c|$ et par A, B et C leurs images respectives dans un plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   a. Placez A, B et C.
   b. Montrez que le triangle obtenu est rectangle isocèle.
3. Soit f l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = 2iz + 1 - 2i$$

   Soient A', B' et C', d'affixes respectives a', b' et c', les images par f des points A, B et C.
   a. Déterminez a', b' et c'. Placer A', B' et C' dans le plan (P).

      Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? (Justifiez la réponse)

   b. Calculez $W = \frac{c' - b'}{c - b}$. Ecrire W sous forme trigonométrique.

Déduisez en la valeur de $\frac{B'C'}{BC}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right)$.

Que peut-on dire des droites (BC) et $(B'C')$?

Utiliser les formules d'Euler : méthode de l'arc moitié

Exercice 11 :

On considère le complexe $z = 1 + e^{i\theta}$. Déterminez le module et un argument de z lorsque $\theta \in]0\,;\,\pi[$

Utiliser les écritures complexes des transformations du plan

Exercice 12 :

On donne dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ les points A, B d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$ et $z_B = 2 - i$. Déterminez :

1. L'affixe des images des points A et B par la translation de vecteur d'affixe $2 + i$
2. L'affixe de l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -3
3. L'affixe de l'image du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Exercice 13 :

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unités graphiques 2 cm.

On considère un point M du plan d'affixe $z = 1 - e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0{,}2\pi[$.

1. Montrez que le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe 1 et de rayon 1, privé du point O.
2. Déterminez le module et un argument de z.
3. On considère la rotation r de centre B d'affixe 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminez l'écriture complexe de la rotation r.
4. Quelle est l'image par r du cercle $\mathcal{C}$?
5. Quelle est l'affixe de l'image d'un point M de $\mathcal{C}$ par r ?

Exercice 14 :

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

   On appelle z_1 la solution comportant une partie imaginaire positive et z_2 l'autre solution.

2. Exprimez z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

   M_1 a pour affixe z_1 et M_2 a pour affixe z_2.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   Calculez l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$.

4. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.
   Calculez l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_2)$.

Reconnaître un ensemble de points

Exercice 15 :

Déterminez géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z+2| = |z-4i|$$

$$|z+1-2i| = 3$$

$$\arg(z-4i) = \frac{\pi}{3}\ mod\ \pi$$

$$\arg\left(\frac{z+2}{z+1-2i}\right) = \frac{\pi}{2}\ mod\ \pi$$

Exercice 16 :

Dans le plan complexe, déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z| = 2\sqrt{2} \qquad |z-3i| = 5$$

$$|z-1+i| = \frac{3}{2} \qquad |\bar{z}+i| = 2$$

$$|z-i| = |z+i| \qquad |z-1-2i| = |z-7+2i|$$

$$|z-2+i| = |\bar{z}+3i| \qquad |-2iz+1-4i| = 4$$