- Trigonométrie -

Principe

Au collège vous ont été enseignés les fondements de la trigonométrie (le fameux sohcahtoa).

L'objectif de ce chapitre est d'élargir cette étude, le but étant de déterminer les coordonnées (et donc la position) d'un point en ne connaissant ni son abscisse, ni son ordonnée, mais l'angle formé avec l'horizontale et la distance de ce point à l'origine.

L'application directe de ce chapitre est la mécanique du solide. Par exemple, je lance une pierre en l'air avec un angle de 60° et suivant une vitesse de 50 km/h : quelle sera la position de cette pierre au bout de 5 secondes ?

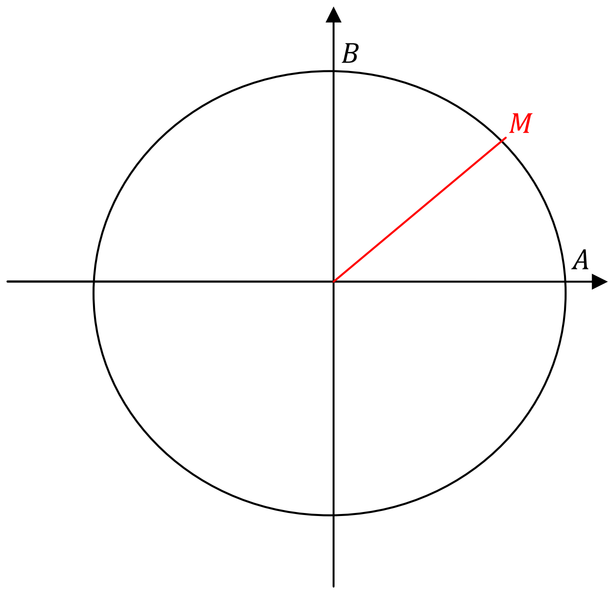
L'essentiel du cours

DEFINITIONS

- Le cercle trigonométrique a pour rayon 1 (et donc pour périmètre 2π)
- Le sens trigonométrique (ou sens positif) est le sens de rotation inverse à celui des aiguilles d'une montre

Remarque : on dira du repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ qu'il est orthonormé direct (orthonormé car $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$ et direct puisque $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$)

Illustration



MESURES D'ANGLES

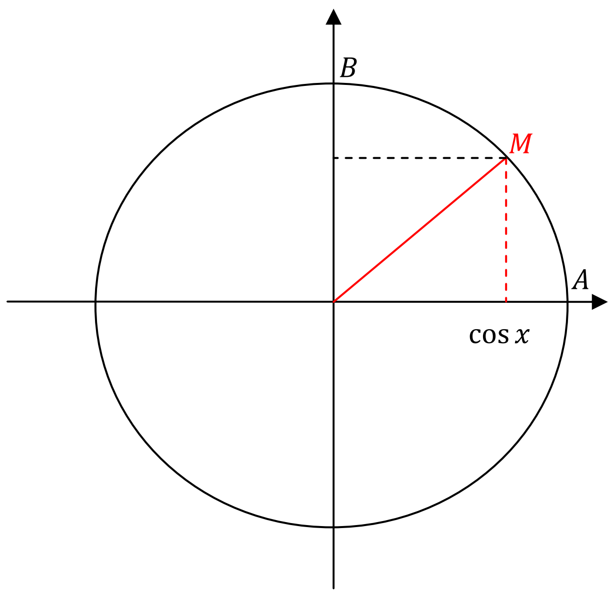
- Sur l'illustration précédente, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ aura pour mesure x. Cette mesure sera exprimée en radians. Il s'agit de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
- Plus généralement, il existe une infinité de mesures pour un même angle.
  Puisque un tour complet de cercle trigonométrique représente 2π radians on considérera que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

COORDONNEES D'UN POINT DANS LE CERCLE : COSINUS ET SINUS

- Les coordonnées d'un point M du cercle trigonométrique défini par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x$ sont :

$$M(\cos x\,;\sin x)$$

Illustration



Propriétés :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$

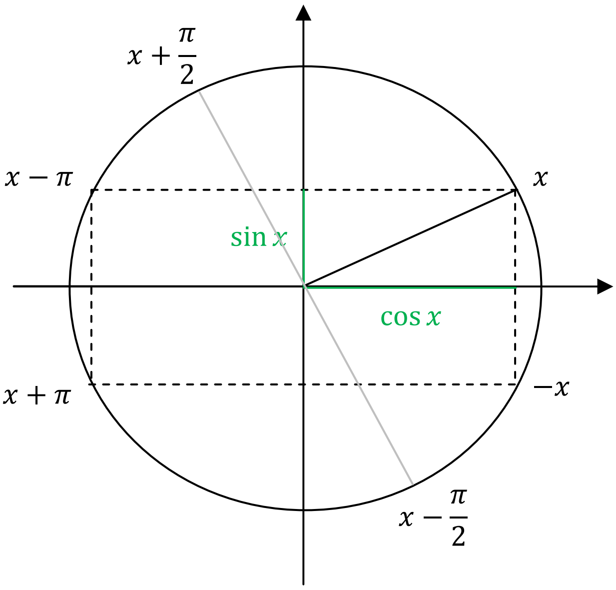
$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x-\pi) = -\cos x$

$\sin(x-\pi) = \sin x$



$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

Formules d'addition

$$cos\,(a+b) = cos\,(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$
$$cos\,(a-b) = cos\,(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$
$$sin\,(a+b) = sin\,(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$$
$$sin\,(a-b) = sin\,(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$$

Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

COORDONNEES POLAIRES

L'objectif des coordonnées polaires est de déterminer entièrement un point par un angle et une distance, plutôt que par sa position dans le plan

Soient $(x\,,y)$ les coordonnées cartésiennes d'un point A quelconque dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Les coordonnées polaires de ce point A seront alors $(r\,,\theta)$, définies par :

Sa coordonnée radiale (ou rayon) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Interprétation graphique : On peut retrouver la quantité r graphiquement : c'est la distance entre le point de coordonnées $(x\,,y)$ et l'origine O du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Sa coordonnée angulaire :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Interprétation graphique : On peut retrouver la quantité θ graphiquement : il s'agit de la mesure de l'angle $(\vec{\imath}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

ATTENTION : Ne jamais laisser la racine carrée au dénominateur. A priori le θ doit être trouvé à l'aide du tableau ci-dessus.

Illustration :