- Primitives et intégrales -

Principe

L'intégration est un concept fondamental des mathématiques (utilisé entre autres en probabilités et en physique). L'intégration permet de calculer la surface de l'espace délimité par la représentation graphique d'une fonction.

L’essentiel du cours

PRIMITIVES

- **Définition :**

On appelle primitive d’une fonction f définie sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f.

Propriété :

Toute fonction f continue sur I admet une infinité de primitives sur I, de la forme $F + k$, ou k est une constante réelle.

Remarque : *On pourra aussi retenir le schéma suivant*

$$F \underset{primitive}{\rightleftarrows} f \overset{dérivée}{\rightleftarrows} f'$$

FORMULES D’INTEGRATION

- **Primitives usuelles :**

Fonction	Primitive
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}\ (n \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$

- **Primitives de fonctions composées :**

$f(x) = u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'}{u}$	$F(x) = \ln u + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + c, c \in \mathbb{R}$

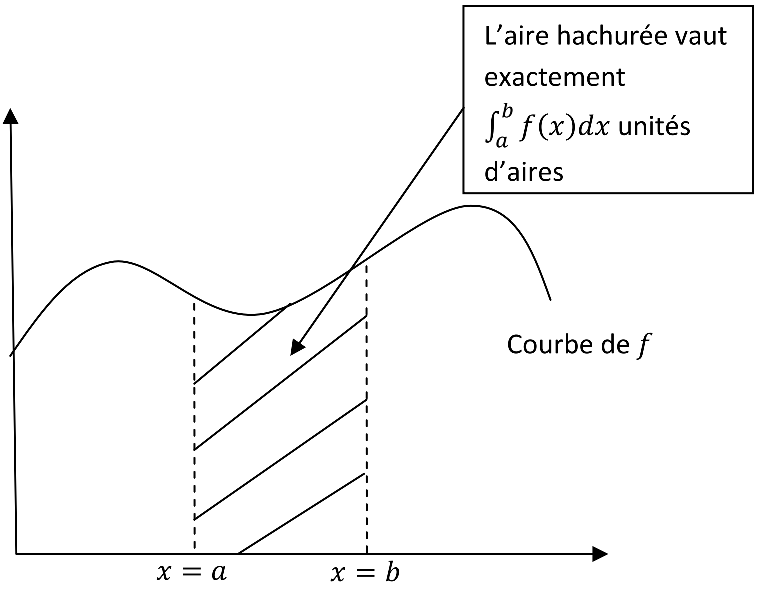
INTEGRALES

- **Définition** :

L'intégrale de a à b de la fonction f est le nombre réel $F(b) - F(a)$

On la notera couramment $\int_a^b f(x)dx$ ou encore $[F(x)]_a^b$

Interprétation : Graphiquement, ce nombre correspond à l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



Propriétés :

- Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx$$

- Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

- Comparaison d'intégrales :

  Si $f < g$ (respectivement $f > g$) sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ (respectivement $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$)

- Conséquence : positivité d'une intégrale :

  Si $f > 0$ (respectivement $f < 0$) sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx > 0$ (respectivement $\int_a^b f(x)dx < 0$)

- **Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle :**

La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est donnée par

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Conséquence : inégalité de la moyenne

Si $m < f(x) < M$ sur $[a\,;b]$ alors :

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

- **Intégration par parties :**

Vous aurez constaté qu'il n'existe pas de formule dans les tableaux ci-dessus servant à déterminer la primitive d'un produit ou d'un quotient : la formule d'intégration par parties y remédie.

$$\boldsymbol{\int_a^b u'(x)\,v(x)dx} = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Remarques :

- *Il est plus facile de la retenir sous cette forme :* $\int u'v = [uv] - \int uv'$
- *Il arrivera dans certains ouvrages que l'on vous donne cette formule :*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)dx = [u(x)v(x))]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

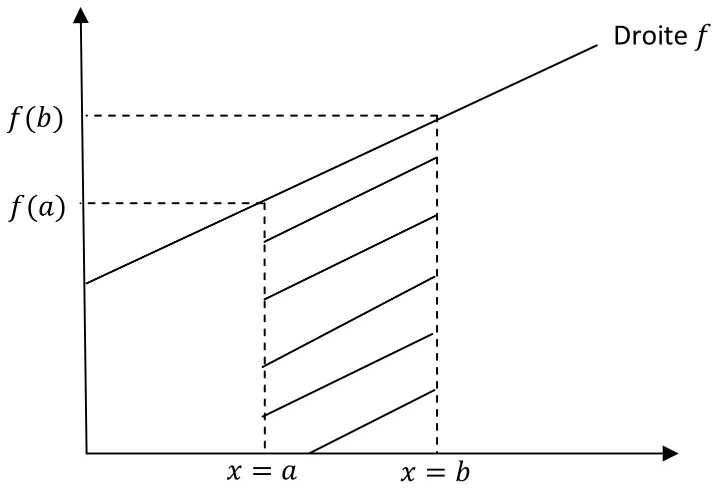
Elle est également utilisable : on a simplement décalé le ' du u *au* v.

- **Cas particuliers :**

- Intégration d'une fonction affine $f(x) = ax + b$

La valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du trapèze représenté ci-dessous

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\big(f(a)+f(b)\big)\times(b-a)}{2}$$



- Aire entre deux courbes

  L'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, la courbe représentative de g et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

- Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe.

  Si $S(x)$ est l'aire de l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors :

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$