- Dérivées -

Principe

La tangente à une courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a est une droite affine : elle admet un donc un coefficient directeur m. Ce coefficient est appelé nombre dérivé en a. Chaque point de f admet une tangente unique, et donc un nombre dérivé unique.

Le signe du coefficient directeur m nous donne le sens de variation de la tangente.

Si l'on était capable de déterminer l'expression d'une fonction nous donnant en chaque point le coefficient directeur de chaque tangente, on serait dès lors en mesure de déterminer les variations de la courbe $\mathcal{C}$: cette fonction n'est autre que la fonction dérivée.

L'essentiel du cours

NOMBRE DERIVE

- **<u>Dérivabilité en un point</u> :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie}$$

De plus, cette limite est le nombre dérivé de la fonction f en a, notée $f'(a)$

Remarque : il existe plusieurs manières de conclure que f n'est pas dérivable en un point :

- *Si les limites sont différentes en a^+ et a^-, alors f n'est pas dérivable en a.*
- *Si l'on trouve $\pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a*
- *Si la limite n'existe pas*

- **<u>Dérivabilité sur un ensemble</u> :**

Une fonction est dérivable sur un ensemble si elle obtenue par opération ou composée de fonctions dérivables sur ce même ensemble.

Propriétés :

- Les fonctions usuelles sont toutes dérivables sur leur ensemble de définition, à l'exception notable de $\sqrt{x}$ et $|x|$ en 0 (voir exercices 4 et 5)
- Une fonction qui n'est pas définie sur un ensemble n'est pas dérivable sur cet ensemble

Conséquences :

- x^n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout n entier naturel
- Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$
- $\sqrt{x}$ est définie sur $[0\,,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,,+\infty[$
- $|x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

FORMULES DE DERIVATION

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Les formules de dérivation à connaître impérativement sont :

$k' = 0$ La dérivée d'une constante est nulle.	$(ku)' = k \times u'$
$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u' \times v + u \times v'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$	

EQUATION D'UNE TANGENTE

L'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a est donnée par l'expression :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$