- Suites -

Principe

Nous aborderons dans ce chapitre quelques notions complémentaires à celles vues en première, en particulier la notion de récurrence permettant de prouver une propriété pour tout rang n

L'essentiel du cours

RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

L'objectif du raisonnement par récurrence est de démontrer qu'une propriété est vraie au rang n.

Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial.

Hérédité : on vérifie que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : la propriété est vraie au rang n

LIMITE D'UNE SUITE ET CONVERGENCE

Une suite est dite convergente si sa limite en $+\infty$ est un nombre réel fini. Ainsi,

$$(U_n) \text{ convergente } \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l, \text{ avec } l \in \mathbb{R}$$

Remarques :

- *Quand une suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge. (ce qui signifie que sa limite vaut* $\pm\infty$)
- *Calculer la limite d'une suite en une autre valeur que* $+\infty$ *n'a pas de sens.*

Un résultat de limite fondamental :

- Si $q > 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

Théorème des gendarmes :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si, $\forall n > n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers le même réel l alors

$$(u_n) \text{ converge vers } l$$

Corollaire : si $\mathrm{v_n} \leq \mathrm{u_n}$ et que $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathrm{v_n} = +\infty$ alors $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathrm{u_n} = +\infty$

De la même manière si $\mathrm{u_n} \leq \mathrm{w_n}$ et que $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathrm{w_n} = -\infty$ alors $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathrm{u_n} = -\infty$

Limites de suites monotones :

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

SUITES ADJACENTES

On dit de deux suites (U_n) et (V_n) qu'elles sont adjacentes lorsque :

- (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$, avec $l \in \mathbb{R}$

OU

- (U_n) est décroissante et (V_n) est croissante
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$, avec $l \in \mathbb{R}$

Remarque :

- *La propriété $lim_{n\to+\infty} U_n = lim_{n\to+\infty} V_n$ peut également s'écrire $lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$*

Propriétés :

- Si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors elles convergent vers un même réel l tel que $U_n \leq l \leq V_n$.
  Remarques :
- *Plus généralement, cela signifie pour tout entier n, on a $U_n \leq V_n$*
- *Il peut être également utile de constater que dans ce cas on a $U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0$, ce qui nous offre un minorant et un majorant à ces deux suites.*

- De la même manière, si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est décroissante et (V_n) est croissante, alors elles convergent vers un même réel l tel que $V_n \leq l \leq U_n$.

  Remarque :
- *Plus généralement, cela signifie pour tout entier* n*, on a* $V_n \leq U_n$
- *Il peut être également utile de constater que dans ce cas on a* $V_0 \leq V_n \leq U_n \leq U_0$*, ce qui nous offre un minorant et un majorant à ces deux suites.*