- Probabilités -

Principe

L'objet de chapitre est d'introduire la notion de loi de probabilité.

La loi de probabilité illustre l'évolution d'un phénomène aléatoire dans le contexte des jeux de hasard. Il s'agit d'associer une variable à une situation de probabilité donnée.

Pour illustrer quand vous lancez un dé, il s'agit d'une situation de probabilité. Dès que vous misez de l'argent sur le numéro sorti, il s'agit d'une loi de probabilité.

L'essentiel du cours

VARIABLES ALEATOIRES ET LOI DE PROBABILITE

- **Définitions** :

- Dès le moment où à chaque issue liée à une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, alors on définit une variable aléatoire sur Ω, que l'on notera X, Y, Z….
- La variable X prend les valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq k}$, c'est-à-dire x_1 , x_2 , … , x_k.
- On définira la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à partir des probabilités $(p_i)_{1\leq i\leq k}$ associées à chacun des $(x_i)_{1\leq i\leq k}$.
- On pourra la représenter de la manière suivante :

X	x_1	x_2	………………….	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…………………	p_k

- **Propriétés** :

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = p_1 + p_2 + \ldots. + p_k = 1$$

Espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \ P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p_i$$

Interprétation : l'espérance mathématique est la moyenne probabiliste de la variable aléatoire X

Variance mathématique :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i \times P(X = x_i))^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \times p_i - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Interprétation : comme en statistiques, la variance mathématique est une mesure de dispersion par rapport à la moyenne de la variable X. Elle mesure la variabilité, l'irrégularité de la variable X. Par exemple, la volatilité d'une action en bourse.

Ecart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

LOIS DISCRETES : BERNOULLI ET BINOMIALE

- **Loi de Bernoulli** :

Un grand nombre d'expériences peut être résumé en une alternative simple : soit j'obtiens ce que je veux, soit je ne l'obtiens pas. En clair, soit mon épreuve est un succès, soit c'est un échec.

Si le succès est de proba p et l'échec de proba $1 - p$ alors ce type d'épreuve suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Si X suit une loi de Bernoulli, alors $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

Si X suit une loi de Bernoulli, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Exemple : je lance un dé cubique parfaitement équilibré **une seule fois**. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de 6 obtenus.

$P(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 0) = \frac{5}{6}$

Ainsi X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$

Par ailleurs, $E(X) = \frac{1}{6}$ et $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

- **Loi binomiale** :

Une loi binomiale est la répétition n fois d'épreuves de Bernoulli indépendantes les unes par rapport aux autres.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple : je lance un dé cubique parfaitement équilibré **cinq fois**. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de 6 obtenus.

La probabilité d'obtenir exactement 3 faces 6 lors de ces 5 tirages suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} (\frac{1}{6})^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-3} \approx 0.032$$

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{25}{36}}$$