# - Nombres complexes -

## Principe

Les nombres complexes forment une extension de l'ensemble des nombre réels. Ils permettent de déterminer les solutions à toutes les équations polynômiales, en particulier lorsque le discriminant est négatif.

Ils permettent également de traiter des problèmes de géométrie planaire par un biais numérique.

## L'essentiel du cours

### DEFINITIONS

- **Nombre complexe**

Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = a + ib$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels et $i$ est un nombre tel que : $i^2 = -1$.

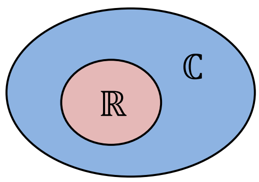
L'écriture $z = a + bi$ est appelée forme algébrique de $z$.

On dira que :

- $a$ est la partie réelle de $z$. On note $\Re_e(z) = a$.
- $b$ est la partie imaginaire de $z$. On note $\Im_m(z) = b$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

*Remarque : L'ensemble $\mathbb{R}$ est inclut dans l'ensemble $\mathbb{C}$*




Propriétés :

- $z$ est un réel ssi $\Im_m(z) = 0$
- $z$ est un imaginaire pur ssi $\Re_e(z) = 0$
- Si $z$ et $z'$ sont deux nombre complexes, alors ils sont égaux si et seulement leurs parties réelles et imaginaires sont égales deux à deux, c'est-à-dire :

$$z = z' ssi \begin{cases} \Re_e(z) = \Re_e(z') \\ \Im_m(z) = \Im_m(z') \end{cases}$$

## - Conjugué d'un nombre complexe

Si $z = a + bi$, alors on appelle conjugué de $z$ et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$

Propriétés :

- $\bar{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'}$
- $\bar{z} \times \overline{z'} = \overline{zz'}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Si $z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

## - Module d'un nombre complexe

On appelle module de $z$ et on note $|z|$ le nombre réel positif tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés :

- $|z||z'| = |zz'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- Si $z \neq 0, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- Si $z' \neq 0, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- (inégalité triangulaire) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

## - Argument d'un complexe

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on appelle argument de $z$ toute mesure $\theta$ en radian de l'angle orienté de vecteur $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

On note $\arg z = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg z = \theta[2\pi]$.

Propriétés :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg \mathrm{z} - \arg z' [2\pi]$

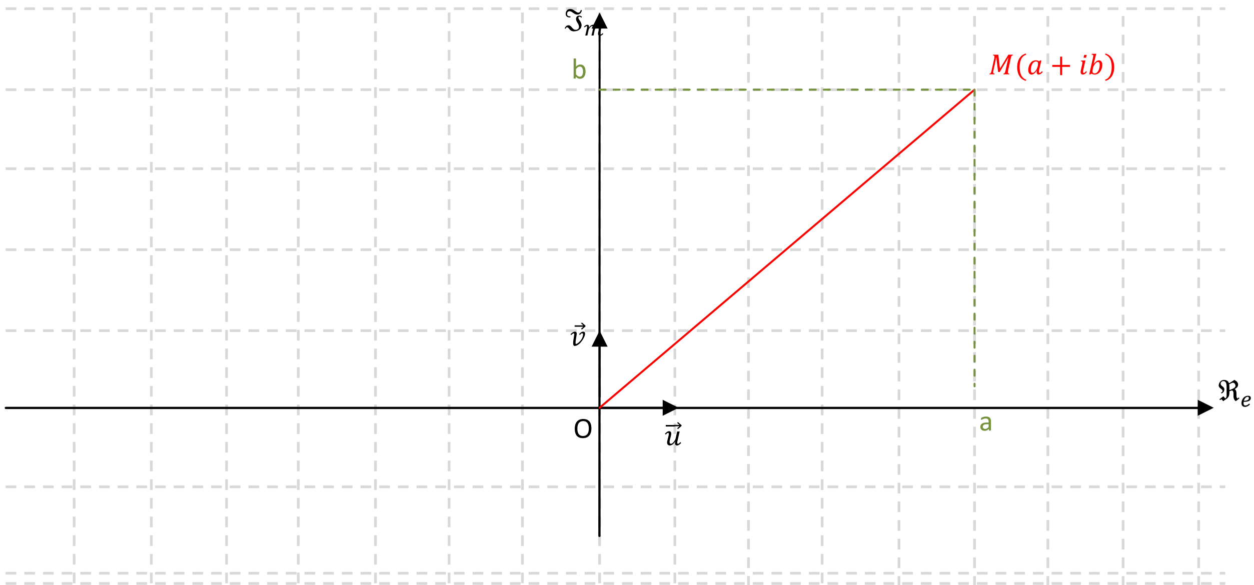
## REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe $z = a + bi$, $a$ et $b \in \mathbb{R}$ , on peut associer le point M de coordonnées $(a, b)$. On dira que $z$ est l'affixe du point M.

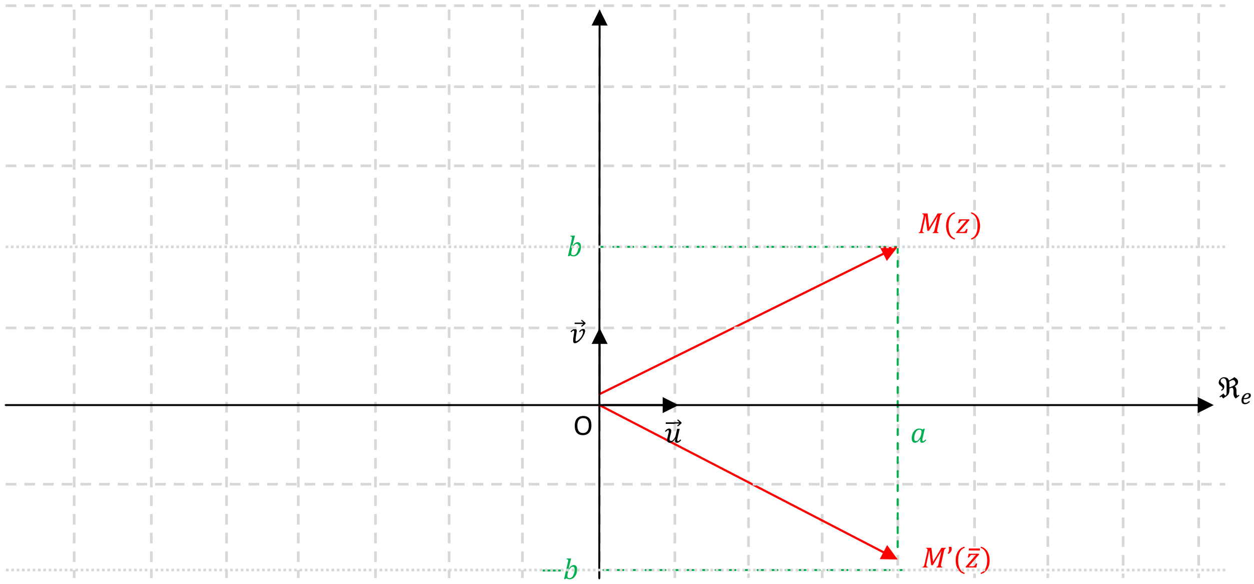
On note $M(z)$ pour signifier que $z$ est l'affixe du point M.

*Remarque : Le vecteur* $\vec{u}\binom{a}{b}$ *est le vecteur image de z, et donc z est également l'affixe de* $\vec{u}$.




- **Interprétation graphique du conjugué**

Les points $M$ et $M'$ du plan complexe d'affixes respectives $z$ et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses



- **Interprétation graphique du module**

Si $M$ a pour affixe $z$ alors $|z| = OM$

Dans le plan complexe, soient les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$. On a :

$$AB = |z_B - z_A|$$

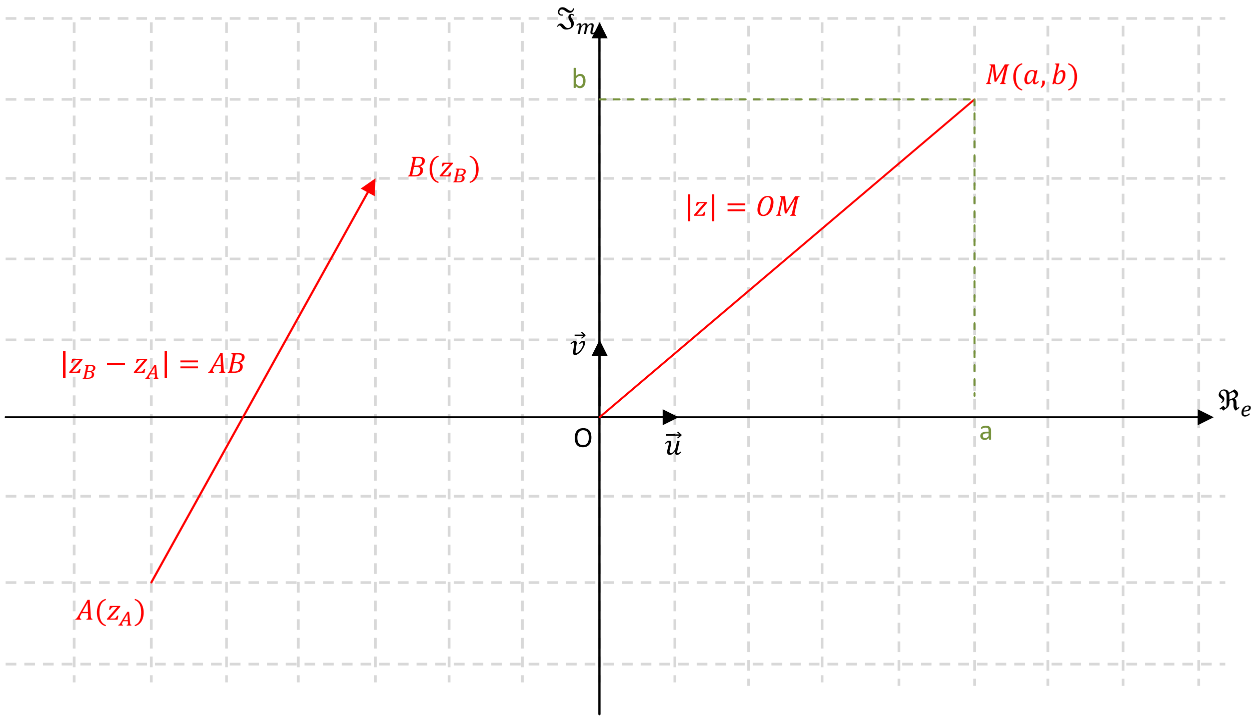
Cas particuliers remarquables :

$M(z)$ appartient à la droite $(\Delta)$ médiatrice du segment $[AB]$ ssi $MA = MB$ c'est-à-dire ssi

$$|z_A - z| = |z_B - z|$$

$M(z)$ appartient au cercle de centre $\Omega$ d'affixe $z_0$ et de rayon $R$ ssi $\Omega M = R$ c'est-à-dire ssi

$$|z - z_0| = R$$




- **Interprétation graphique d'un argument**

Si $M$ a pour affixe $z$ alors $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Dans le plan complexe, soient les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.

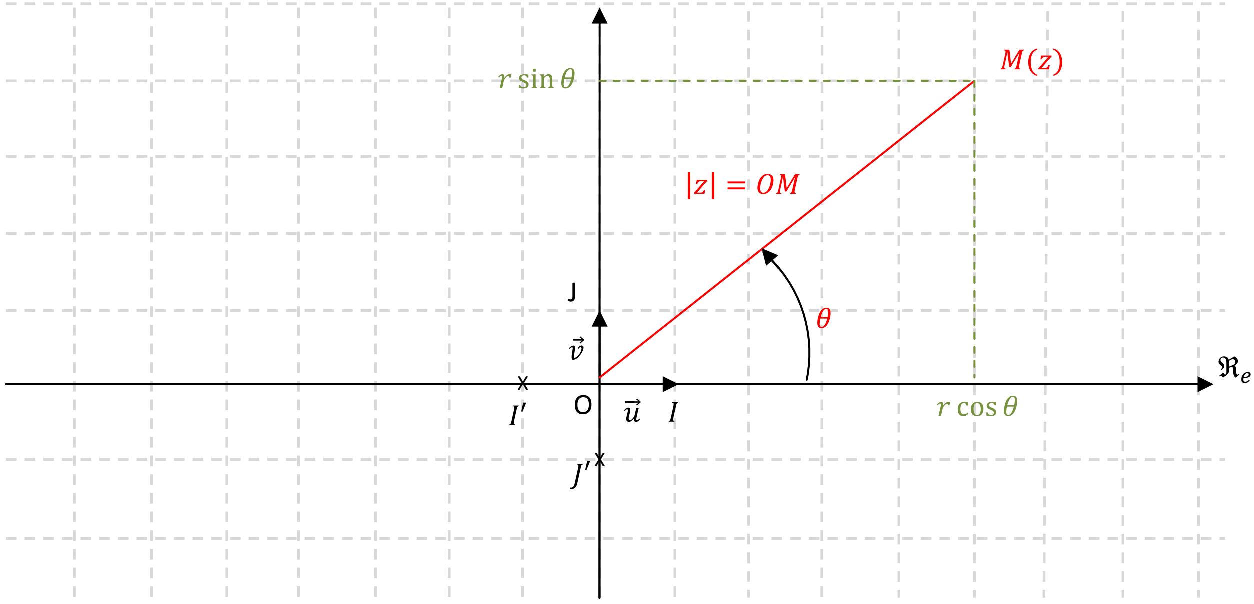
Alors

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

Plus généralement, soient les points $A, B, C$ et $D$ d'affixes respectives $z_A, z_B, z_C$ et $z_D$.

Alors

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$




## FORME TRIGONOMETRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE

- **Forme trigonométrique**

Tout nombre complexe non nul de module $r$ et dont un argument est $\theta$ s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$, une forme trigonométrique de $z$ est :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

- **Forme exponentielle**

Tout nombre complexe non nul de module $r$ et dont un argument est $\theta$ s'écrit sous forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

## COMPLEXES ET GEOMETRIE

- **Translation**

Soit $M$ et $M'$ deux points du plan complexe, d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan d'affixe $z_{\vec{w}}$.

$M'$ est l'image du point $M$ par la translation de vecteur $\vec{w}$ ssi

$$z' = z + z_{\vec{w}}$$

- **Homothétie**

Soit $M$ et $M'$ deux points du plan complexe, d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Soit $\Omega$ un point du plan complexe d'affixe $\omega$ et $k$ un réel non nul.
$M'$ est l'image du point $M$ par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ ssi

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

- **Rotation**

Soit $M$ et $M'$ deux points du plan complexe, d'affixes respective $z$ et $z'$.
Soit $\Omega$ un point du plan complexe d'affixe $\omega$ et $\theta$ un réel.
$M'$ est l'image du point $M$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ ssi

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

## RESOLUTION D'UNE EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$

Soient $a, b, c$ trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation :

$az^2 + bz + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, une solution réelle :

$$z = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$