- Suites numériques -

Principe

En mathématiques, une suite est une famille d'éléments indexée par les entiers naturels.

Un exemple classique de suite est l'évolution au fil des années d'un dépôt bancaire. Les intérêts dus chaque année seront calculés sur le montant présent sur le compte bancaire d'une année sur l'autre (et non pas sur un montant de départ fixé).

On pourra également citer la suite composée par les nombres pairs $(2, 4, 6 \dots)$. On constate facilement qu'il suffit d'ajouter 2 à un terme pour obtenir le suivant : ce lien logique entre chaque terme d'une succession de nombres ne définit rien d'autre qu'une suite.

L'essentiel du cours

VOCABULAIRE

On appelle premier terme d'une suite l'élément démarrant la suite.

On appelle terme général d'une suite (U_n) le nombre U_n. Il est exprimé soit directement en fonction de n (suite explicite), soit en fonction de son terme précédent (suite définie par récurrence)

La suite U_n ou $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ est l'ensemble d'éléments $(U_0, U_1, \dots, U_n)$

SUITES EXPLICITES

Une suite explicite est une suite dont chaque terme est défini en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On peut donc écrire $U_n = f(n)$

Exemple : $u_n = 4 + 2n$ et $V_n = 2^n$ sont des suites explicites

Remarque : Ce type de suite permet d'en calculer n'importe quel terme à l'aide de son rang : il suffit de remplacer n dans l'expression de u_n par la valeur souhaitée.

Dans l'exemple ou l'on avait $u_n = 4 + 2n$ on aurait pu calculer $u_0 = 4 + 2 \times 0 = 4$ ou encore $u_{100} = 4 + 2 \times 100 = 204$

SUITES DEFINIES PAR RECURRENCE

Une suite définie par récurrence est une suite dont on dispose du premier terme et du terme suivant le terme général. On les présentera sous la forme :

$$(U_n)\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_{n+1} = \cdots \, en\, fonction\, de\, u_n \end{cases}$$

Exemple : $(U_n)\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ et $(V_n)\begin{cases} V_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3-u_{n-1}} \end{cases}$ sont des suites définies par récurrence.

Remarque : Ce type de suite ne permet pas de calculer n'importe quel terme à l'aide de son rang, car l'on a besoin pour ce faire du terme de rang précédent.

Dans l'exemple ou l'on donnait $(U_n)\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$, *on a* $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ *et* $u_{100} = 2u_{99} - 1$, *mais pour déterminer la valeur de* u_{99}, *on a besoin de la valeur de* u_{98}, *et pour* u_{98} *de celle de* u_{97}*…et ainsi de suite.*

L'objectif global de l'étude des suites devient dès lors évident : **transformer une suite définie par récurrence en une suite explicite.**

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE QUELCONQUE

Une suite est dite croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$

Une suite est dite décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Une suite est dite constante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

SUITES PARTICULIERES

- **Les suites arithmétiques :**

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant r, appelé raison de la suite, au terme précédent.

Elle est donc définie par récurrence par : $(U_n)\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \ldots\ldots \xrightarrow{+r} u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n$$

Forme explicite :

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme u_o et de raison r.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = u_0 + nr$$

Somme de termes consécutifs :

La somme des « $n+1$ » premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite arithmétique est :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$S = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times nombre\ de\ termes}{2}$$

- **Les suites géométriques :**

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par un nombre q constant, appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par $(U_n) \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\times q} u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n$$

Forme explicite :

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme u_o et de raison q.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Somme de termes consécutifs :

La somme S des « $n+1$ » premières puissances (de q^0 à q^n) d'un nombre q $(q \neq 1)$ est donnée par la formule :

$$S = 1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

La somme des « $n+1$ » premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite géométrique est :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombres\ de\ termes}}{1 - raison}$$

- **Les suites aritmético-géométriques :**

Une suite arithmético- géométrique est une suite vérifiant une relation de récurrence affine, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme $u_{n+1} = au_n + b$. Elles permettent des généraliser les définitions des suites arithmétiques et géométriques. Notez que les propriétés vues plus haut ne s'appliquent en aucun cas en l'état à ce type de suites.

Remarque : vous en croiserez probablement sur votre route, mais devrez les considérer comme des suites quelconques, leur étude détaillée n'étant pas au programme du lycée.