- Probabilités -

Principe

La probabilité d'un évènement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque que l'évènement se produise est grand.

Exemple : Si l'on considère que la probabilité que le lancer d'une pièce donne pile est $\frac{1}{2}$, cela signifie que si on lance un très grand nombre de fois cette pièce, la fréquence des piles va tendre vers $\frac{1}{2}$, sans préjuger de la régularité de cette répartition.

L'essentiel du cours

GENERALITES

- **La théorie ensembliste**

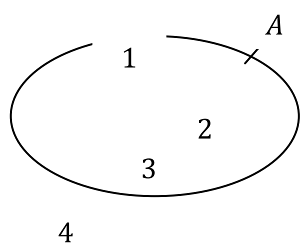
Définition :

Un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets quelconques.

On appellera ces objets les éléments de l'ensemble. On dira d'un élément qu'il appartient à un ensemble, et l'on utilisera la notation $\in$. On pourra aussi dire que les issues réalisent ou sont favorables à un évènement.

Exemple :

Soit A l'ensemble ci-après.



- On constate que 1, 2 et 3 appartiennent à A. De plus, ce sont les seuls éléments de A. On écrira alors $A = \{1, 2, 3\}$.
- De même, 4 est en dehors de A. Il est donc logique de ne pas le retrouver dans l'énoncé de A. De plus, on écrira $4 \notin A$.

Définition :

On dira d'un ensemble qu'il est fini si le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. En probabilités, on travaillera essentiellement dans le cadre d'ensembles finis.

Le nombre d'éléments d'un ensemble est appelé cardinal de cet ensemble, et sera noté card.

Exemple :

Reprenons l'ensemble A de l'exemple précédant. Il contient 3 éléments : 1, 2 et 3. Son cardinal est donc 3. On écrira $card(A) = 3$.

Remarques :

- *Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide. Si l'ensemble B est vide, alors on note :*

$$B = \emptyset$$

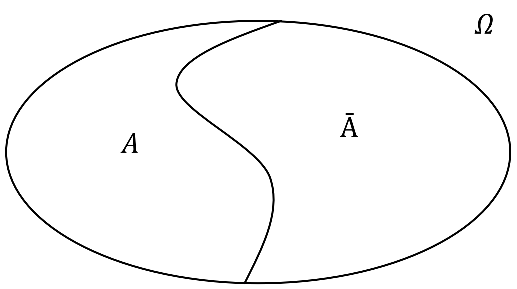
- *Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément est appelé singleton ou plus rarement évènement élémentaire.*
- *Un ensemble contenant deux éléments est appelé une paire.*

- **Vocabulaire usuel**

Définition : évènement contraire

- On appelle univers l'ensemble de tous les résultats (ou issues) possibles lors d'une expérience aléatoire. On le notera communément Ω (Omega).
- L'ensemble des évènements reliés à cette expérience seront inclus dans Ω. Si A est une ensemble inclut dans Ω, on notera $A \subset \Omega$.
- L'évènement contraire de A, ou évènement complémentaire de A, contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas des éléments de A. On le notera $\bar{A}$.

ILLUSTRATION :



Exemple : Supposons que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et que A est l'ensemble regroupant tous les multiples de 3.

Puisque l'univers est réduit à 6 éléments, il va falloir déterminer tous les multiples de 3 parmi ces seuls chiffres. Les seuls multiples de 3 parmi ces éléments étant 3 et 6, on aura alors $A = \{3,6\}$.

Dès lors, $\bar{A}$ sera composé de tous les éléments de Ω qui ne sont pas des éléments de A, c'est-à-dire $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}$: ce sont les éléments de Ω qui ne sont pas multiples de 3.

PROPRIETE :

Soit A un ensemble fini tel que $A \subset \Omega$, alors :

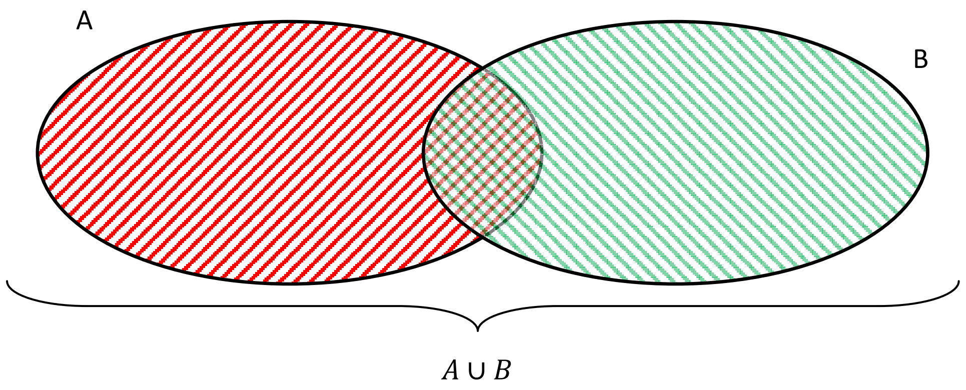
$$card\ \bar{A} = card\ \Omega - card\ A$$

Définition : réunion de deux ensembles

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B. On la notera $A \cup B$.
On pourra également dire que l'évènement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des évènements A et B est réalisé.

ILLUSTRATION :

L'ensemble des parties hachurées en rouge, en vert et aux deux couleurs représente l'union $A \cup B$ de deux ensembles non disjoints A (en rouge) et B (en vert).



Exemple :

Soit $A = \{1, 2, 3,4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

On aura alors

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

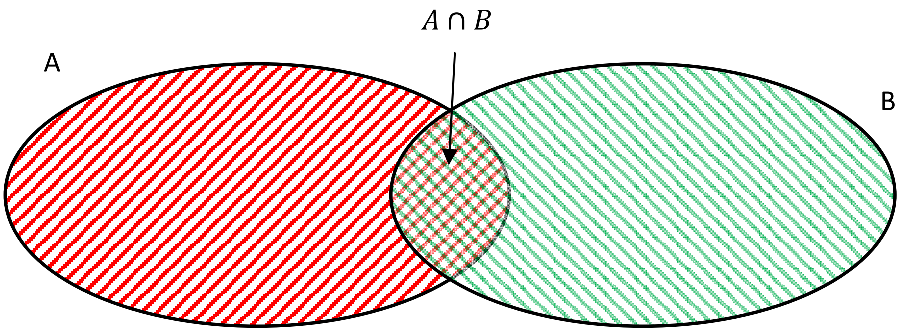
On notera qu'un même élément peut appartenir à la fois à A et à la fois à B. Cet élément particulier n'apparaîtra donc qu'une seule fois dans l'énoncé de $A \cup B$.

Définition : intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B. On la notera $A \cap B$.
On dira aussi que l'évènement $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés tous les deux.

ILLUSTRATION :

La partie hachurée en rouge **et** en vert représente l'intersection $A \cap B$ de deux ensembles non disjoints A (en rouge) et B (en vert).



Exemple :

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

On aura alors

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

Définition : partition d'ensembles

On dira que deux ensembles A et B forment une partition d'un ensemble X si et seulement si :

$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = X \\ A \neq \emptyset \text{ et } B \neq \emptyset \end{cases}$$

Remarque :
$A \cap B = \emptyset$ signifie que les ensembles A et B sont disjoints, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun élément en commun à A et à B.

Exemple :

Un évènement A et son complémentaire $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω puisque vérifient les trois propriétés.

CALCULER DES PROBABILITES SIMPLES

Définition :

La probabilité est l'évaluation du caractère probable d'un évènement.

A chaque évènement A lié à une expérience aléatoire est associé sa probabilité de survenance, notée $P(A)$.

La probabilité d'un évènement est toujours comprise entre 0 et 1.

Plus ce nombre est élevé et proche de 1, plus la chance que l'évènement se produise est grande.

Exemple :

On peut considérer que la probabilité d'obtention du coté 'pile' lors du lancer d'une pièce équilibrée est de $\frac{1}{2}$. (''on a une chance sur deux que la pièce tombe sur le côté pile''). Ce nombre signifie que si l'on lance un très grand nombre de fois cette même pièce, la fréquence d'obtention des piles va tendre de plus en plus vers $\frac{1}{2}$, sans préjuger de la régularité de la répartition des piles.

PROPRIETE :

- $P(\Omega) = 1$, il s'agit de l'évènement certain.
- Soit A un evenement improbable, alors

$$P(A) = P(\emptyset) = 0, \text{ il s'agit de l'évènement impossible.}$$

- $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

PROPRIETE :

Soient A et B deux ensembles disjoints (ou évènements incompatibles), alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Soient A et B deux ensembles tels que $P(A \cap B) \neq 0$ (c'est-à-dire ayant au moins un élément en commun), alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Définitions :

1. Pour tout évènement $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

2. Si deux évènements quelconques A et B ont même probabilité, on dira qu'ils sont équiprobables.

Exemple :

On dispose d'une urne contenant deux boules bleues, une boule blanche et 4 boules rouges.

Soit A l'évènement « tirer une boule bleue » et B l'évènement « tirer une boule rouge »

Afin de déterminer $P(A)$ et $P(B)$, on aura besoin des informations suivantes :
$card(A), card(B)$ et $card(\Omega)$.

Or, l'urne contient 7 boules en tout dont 2 bleues donc $card(\Omega) = 7$ et $card(A) = 2$ et par suite $P(A) = \frac{2}{7}$

De même, l'urne contient 4 boules rouges donc et $card(B) = 4$ et par suite $P(B) = \frac{4}{7}$