- Polynômes du second degré -

Principe

On appelle polynôme du second degré la somme d'une fonction carré et d'une fonction affine : il s'agit donc ni plus ni moins de mélanger l'étude de ces deux chapitres de seconde et d'avancer encore un peu plus vers l'exhaustivité des types de fonctions rencontrées.

L'essentiel du cours

DEFINITION

Un polynôme du second degré est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Remarques :

- *Le degré d'un polynôme est donné par la puissance la plus élevée de son expression. Par exemple, on appellera polynômes du troisième degré les fonctions de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$*
- *On notera qu'un polynôme du premier degré, donc de la forme $ax + b$, n'est rien d'autre qu'une fonction affine.*

FORME CANONIQUE

La forme canonique d'un polynôme du second degré est donnée par :

$$a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Où α et β sont les cordonnées du sommet de parabole, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Remarques :

- *Il existe un moyen simple de la déterminer sans passer par la formule, que nous verrons en méthode 1.*
- *Il s'agit d'une différence de deux carrés (identité remarquable), donc sa forme factorisée est :*

$$a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

ce qui tend à expliquer l'origine des formules que nous allons voir par la suite.

ETUDE GRAPHIQUE D'UN POLYNOME

La représentation graphique d'un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, a non nul est une parabole.

Le sommet de cette parabole aura pour abscisse $x = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $y = P\left(-\frac{b}{2a}\right)$

- **<u>Sens de variation d'un polynôme du second degré</u> :**

  - **si $\boldsymbol{a} > 0$**

  La parabole est orientée vers le haut. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de P	$+\infty$	$\searrow$	$P\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

…et le polynôme admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$

  - **si $\boldsymbol{a} < 0$**

  La parabole est orientée vers le bas. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de P	$-\infty$	$\nearrow$	$P\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

…et le polynôme admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$

Remarque : si $a = 0$: il s'agit d'une fonction affine : sa représentation est donc une droite !

ETUDE NUMERIQUE D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRE

- **Discriminant :**

On appelle discriminant d'un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **Racines d'un polynôme :**

On appelle racine(s) d'un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ l'ensemble des valeurs solutions de l'équation $P(x) = 0$

Les différents cas à retenir sont :

- Si $\Delta > 0$ l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation $P(x) = 0$ admet une solution

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution

- **Forme factorisée d'un polynôme :**

La forme développée d'un polynôme est $P(x) = ax^2 + x + c$.

Sa forme factorisée est dès lors :

- Si $\Delta > 0$ la forme factorisée de P est :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$ la forme factorisée de P est :

$$P(x) = a(x - x_1)^2$$

- Si $\Delta < 0$ aucune factorisation n'est possible.

- **Signe d'un polynôme :**

- Si $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions, ce qui signifie que la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarques :

- *Ce tableau n'est valable que si $x_1 < x_2$. Dans le cas où $x_1 > x_2$, inversez la position des deux valeurs dans le tableau.*
- *Vous entendrez régulièrement la phrase mnémotechnique ''le signe de a va se placer **à l'extérieur des racines** et le signe de $-a$ **à l'intérieur des racines** ''*

    - Si $\Delta = 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet une solution, ce qui signifie que la parabole coupe une fois l'axe des abscisses, d'où :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

    - Si $\Delta < 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'admet aucune solution, ce qui signifie que la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, d'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	